MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

60. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 21. APRIL 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

60. Band **Inhalt** 1. Heft

Seite

Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III 1
Schöneborn, H., Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. II 17
Söhngen, H., Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation 31
Thosar, Y. V., Generalisations of Neumann's formula for $Q_n(y)$ 52
Lorenzen, P., Über die Korrespondenzen einer Struktur 61
Graeub, W., Über die schwächste Uniformisierende 66
Holyoke, T. C., Transitive extensions of dihedral groups 79
Müller, M., Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten 81
Bagchi, H. D., and B. N. Mukherjee, Note on the operational representations of some special functions 88
Reid, W. T., A Tauberian Theorem for Power Series 94
Schneider, Th. Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes 98

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 1—16 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III.

Von
WALTER NEUMER.

Vorbemerkung.

Die beiden ersten Abschnitte dieser Arbeit (zitiert als I und II) erschienen in dieser Z. **58**, 391—413 (1953) und **59**, 434—454 (1954); sie enthalten die §§ 1—6. Der vorliegende dritte Abschnitt umfaßt die §§ 7 und 8 und bringt zunächst einige Rechenregeln für den freien Algorithmus (§ 7). Sodann werden zwei konstruktive Algorithmen mit dem Grundoperator U ($\alpha U = \alpha + 1$) bzw. W ($\alpha W = \alpha \cdot 2$) skizziert und es wird gezeigt, daß man mit jedem dieser Algorithmen denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse erfaßt wie mit dem in I entwickelten Algorithmus (§ 7). In § 8 werden einige Möglichkeiten für die Einführung neuer Operatoren dargestellt und das Beispiel der Operatoren $\overline{V}$ und I_0 ($\alpha \overline{V} = \alpha V^{\alpha} = \alpha V I_0$) wird genauer durchgerechnet.

Die Paragraphen werden durchgehend, die Sätze, Formeln und Fußnoten in jedem Abschnitt für sich numeriert.

3. Abschnitt.

Beispiele für das Rechnen im freien Algorithmus.

§ 7. Einige Rechenregeln. Anwendungen.

1. Unter dem freien Algorithmus wollen wir von jetzt ab ganz allgemein das Rechnen mit beliebigen Operatoren aller Stufen gemäß den Regeln (1) und (2_i) ($i = 1, 2, \ldots$) von II, § 4, **1** verstehen. Wenn wir speziell vom freien Algorithmus der Symbole $V, J, J_1, J_2, \ldots$ (als Einzelzeichen für Operatoren 1., 2., 3., ... Stufe) sprechen, so meinen wir, daß außer diesen Symbolen keine ursprünglichen Einzelzeichen mehr für Operatoren verwendet werden sollen, sondern höchstens noch Einzelzeichen als Abkürzungen für Operatoren, die aus Zahlenfiguren $\widetilde{\mathfrak{F}}$ entnommen sind; unter einem $\widetilde{\mathfrak{F}}$ verstehen wir dabei eine Figur, die aus einem $\mathfrak{F}$ (s. II, § 4, **2**) entsteht, wenn $J, J_1, J_2, \ldots$ an die Stelle von $I, I', I'', \ldots$ gesetzt werden.

Es erscheint zunächst nötig, die in II, § 6, **1** für Operatoren erster Stufe definierte Monotonie auch für Operatoren höherer Stufen zu erklären. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Am nächsten liegt folgende Definition („Operatormonotonie"). Ein *Operator zweiter Stufe* J heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J \leq \beta \overline{W} J$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, W und $\overline{W}$ monotone Operatoren erster Stufe.

Ein *Operator dritter Stufe* J_1 heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J J_1 \leq \beta \overline{W} \bar{J} \bar{J}_1$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, $J \leq \bar{J}$, W und $\overline{W}$ bzw. J und $\bar{J}$ monotone Operatoren erster bzw. zweiter Stufe.

(Bezüglich der Relationen $W \leqq \overline{W}$, $J \leqq \bar{J}$ s. **II**, § 6, **1**). — Sind W, J, J_1 monotone Operatoren 1., 2., 3. Stufe, so sind WJ, J^ν, JJ_1, J_1^ν monotone Operatoren 1., 2., 2., 3. Stufe. — Entsprechende Definitionen und Bemerkungen gelten für die Operatoren vierter und höherer Stufe. — I, I', I'' sind monotone Operatoren in diesem Sinn, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe, die in einer Figur $\mathfrak{F}$ vorkommen.

Für unsere Zwecke wichtiger ist eine andere Art von Monotonie, die speziell für Iteratoren (s. **II**, § 4, **2**) erklärt wird („Iteratormonotonie"). Zur Vorbereitung geben wir folgende Definitionen. — Sind V und W Operatoren erster Stufe und gilt dabei $\alpha W \in \{\alpha V^\nu\}_{1 \leqq \nu < P}$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, so nennen wir W eine *V-Potenz*. — V ist eine V-Potenz. Mit W ist W^ν eine V-Potenz, allgemein WJ, wenn J ein Iterator erster Stufe ist. — Eine V-Potenz W heiße *V-monoton*, wenn $\alpha W \leqq \beta W$ gilt für $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$. — Mit W ist W^ν eine V-monotone V-Potenz.

Nun definieren wir: Ein *Iterator J von erster Stufe* heiße *monoton*, wenn stets $\alpha W J \leqq \beta \overline{W} J$ gilt, sobald $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ ist und $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen sind, unter V einen beliebigen Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ verstanden ($\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$).

Ist W eine V-monotone V-Potenz, J ein monotoner Iterator erster Stufe, so ist auch WJ eine V-monotone V-Potenz. — Mit J ist jede Potenz J^ν monoton.

Ist J ein monotoner Iterator erster Stufe, $\bar{J}$ ein Operator zweiter Stufe, so daß $J \leqq \bar{J}$, ist ferner $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ und sind $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen, so gilt

$$\alpha W J \leqq \beta \overline{W} \bar{J}.$$

Denn $\alpha W J \leqq \beta \overline{W} J \leqq \beta \overline{W} \bar{J}$. Daraus schließt man induktiv, wenn auch noch $\bar{J}$ ein monotoner Iterator ist:

$$\alpha W J^\nu \leqq \beta \overline{W} \bar{J}^\nu \quad \text{für} \quad \nu < P.$$

Einen *monotonen Iterator zweiter Stufe* J_1 erklären wir durch die Forderung $\alpha W J J_1 \leqq \beta \overline{W} \bar{J} J_1$, wenn $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, V ein beliebiger Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen und $J \leqq \bar{J}$ zwei monotone Iteratoren erster Stufe sind. Entsprechend sind monotone Iteratoren 3., 4., ... Stufe zu definieren. — JJ_1 ist wieder monoton, ebenso J_1^ν usw. — $I, I', I'', \ldots$ sind monotone Iteratoren, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe in einer Figur $\mathfrak{F}$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$.

2. Ähnlich wie Hilfssatz 2 in **II** beweisen wir nun den

Satz 1. *Für beliebiges $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und beliebige Operatoren V und J erster und zweiter Stufe dieses Bereichs ist $\alpha V J I'$ eine Zahl der Form $\omega^\nu \geqq \omega$.*

Zunächst wird nämlich [vgl. **II**, (19)]

(1) (a) $\alpha V J^\xi \geqq \alpha V + \xi$ (b) $\alpha V J I' \geqq (\alpha V) \cdot \omega$.

Denn $\alpha V J \geqq \alpha V + 1$, $\alpha V J^2 \geqq \alpha V J + 1 \geqq \alpha V + 2$ usw. Also wird $\alpha V J^{\alpha V J} \geqq \alpha V + \alpha V J \geqq \alpha V + \alpha V + 1$ usw., woraus die Relation (1b) folgt, die ihrerseits liefert:

$$\alpha V + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{2}$$

Sodann zeigen wir:

$$\alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3}$$

Zur Bestätigung setzen wir $\beta = \alpha V J I' = \lim\limits_{n} \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$, $\beta_{n+1} = \alpha V J^{\beta_n}$; $\gamma = \alpha (V J^{\nu}) J I' = \lim\limits_{n} \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha (V J^{\nu}) J = \alpha V J^{\nu+1}$, $\gamma_{n+1} = \alpha V J^{\nu+\gamma_n}$. Dann gilt $\beta_n < \gamma_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Denn $\beta_1 < \gamma_1$ (wir denken $\nu > 0$, sonst ist nichts zu beweisen), und aus $\beta_n < \gamma_n$ folgt $\beta_{n+1} < \gamma_{n+1}$. Somit ist $\beta = \lim\limits_{n} \beta_n \leqq \lim\limits_{n} \gamma_n = \gamma$.— Andererseits wird nach der Voraussetzung über ν in (3): $\alpha (V J^{\nu}) J^{\beta} = \alpha V J^{\nu+\beta} = \alpha V J^{\beta} = \beta$, so daß nach dem Prinzip der kritischen Zahlen (**II**, § 6, **2**) $\beta \geqq \gamma$ wird. — Daher ist $\beta = \gamma$.

Aus (2), auf $V J^{\nu}$ statt V angewandt, und (3) folgt

$$\alpha V J^{\nu} + \alpha V J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3a}$$

Für $\nu = 1$ schließt man durch Iteration von (3a), daß $\beta_n + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ ist für $n = 1, 2, \ldots$, was $\nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ für $\nu < \alpha V J I'$ impliziert. — Damit ist Satz 1 bewiesen. Zugleich haben wir gefunden:

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu < \alpha V J I', \ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \\ V \text{ und } J \text{ beliebige Operatoren erster und zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{cases}$$

Ist J ein Iterator erster Stufe, so gilt

$$\alpha (V J)^{\nu} \geqq \alpha V^{2^{\nu}} \quad (0 \leqq \nu < P, \ J \text{ Iterator erster Stufe}). \tag{5}$$

Denn $\alpha (V J)^0 = \alpha V^0 = \alpha$, $\alpha V J \geqq \alpha V^2$; ist (5) richtig für $\nu < \xi$, so ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit für $\nu = \xi$, wenn ξ Limeszahl. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird $\alpha (V J)^{\eta+1} = (\alpha (V J)^{\eta}) V J \geqq (\alpha (V J)^{\eta}) V^2 \geqq \alpha V^{2^{\eta}+2} = \alpha V^{2^{\xi}}$.

Des weiteren bestehen die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha V J^{n+1} \geqq \alpha (V J)^{2^n} & \text{für} \quad n < \omega \\ \alpha V J^{\nu} \geqq \alpha (V J)^{2^{\nu}} & \text{für} \quad \omega \leqq \nu < P \end{array}\right\} J \text{ Iterator erster Stufe.} \tag{6}$$

Beweis. Es ist $\alpha V J^2 = \alpha V J^{1+1} = \alpha (V J) J \geqq \alpha (V J)^2 = \alpha (V J)^{2^1}$. Sei (6) richtig für $n \leqq m$. Dann kommt $\alpha V J^{m+1} = \alpha (V J^m) J \geqq \alpha (V J^m)^2 = (\alpha V J^m) V J^m \geqq (\alpha V J^m) (V J)^{2^m - 1} \geqq (\alpha (V J)^{2^{m-1}}) (V J)^{2^{m-1}} = \alpha (V J)^{2^m}$ [1]). Also kommt $\alpha V J^{\omega} = \lim\limits_{n} \alpha V J^{n+1} \geqq \lim\limits_{n} \alpha (V J)^{2^n} = \alpha (V J)^{2^{\omega}}$. — Sei (6) richtig für $\omega \leqq \nu < \xi$. Wenn ξ Limeszahl, so folgt sofort die Richtigkeit für $\nu = \xi$. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird

$$\begin{aligned} \alpha V J^{\eta+1} &= \alpha (V J^{\eta}) J \geqq \alpha (V J^{\eta})^2 \\ &= (\alpha V J^{\eta}) V J^{\eta} \geqq (\alpha V J^{\eta}) (V J)^{2^{\eta}} \geqq (\alpha (V J)^{2^{\eta}}) (V J)^{2^{\eta}} = \alpha (V J)^{2^{\eta+1}} \text{ [1])}. \end{aligned}$$

[1]) Wir benützen den Umstand, daß, unter J einen Iterator erster Stufe verstanden, $\alpha V J^{\nu}$ für $\nu \geqq 2$ eine Zahl aus $\{\alpha (V J)^{\mu}\}_{2 \leqq \mu < P}$ ist.

(6) liefert in Verbindung mit (5):

$$\alpha V J I' = \alpha V J^{\alpha V J I'} \geq \alpha (V J)^{2^{\alpha V J I'}} \geq \alpha V^{2^{\alpha V J I'}} \geq 2^{\alpha V J I'} \geq \alpha V J I',$$

woraus folgt:

(7) $\alpha V J I' = \alpha (V J)^{\alpha V J I'} = \alpha V^{\alpha V J I'} = 2^{\alpha V J I'}$ (J Iterator erster Stufe),

daher

Satz 2. *Ist J ein Iterator erster Stufe und ist $\alpha V J I' > \omega$, so ist $\alpha V J I'$ eine ε-Zahl.*

Es gilt ferner für beliebige Operatoren J von zweiter Stufe:

(8) $\alpha V (J^n) I' = \alpha V J I'$ für $n = 1, 2, \ldots,$ J Operator zweiter Stufe.

Zum Beweis setzen wir wieder $\alpha V J I' = \beta = \lim_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$ usw., $\alpha V (J^n) I' = \gamma = \lim_n \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha V J^n$, $\gamma_2 = \alpha V (J^n)^{\gamma_1}$ usw. Dann wird $\gamma_1 \geq \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha V J^{n \gamma_1} \geq \alpha V J^{\beta_1} = \beta_2$ usw., also $\gamma \geq \beta$. Andererseits ist $\alpha V (J^n)^\beta = \alpha V J^\beta = \beta$ und somit nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\beta \geq \gamma$.

Wir bringen jetzt zwei Relationen bezüglich monotoner Iteratoren erster Stufe.

(9) $(\alpha V) V J I' = \alpha V J I'$, wenn J ein monotoner Iterator erster Stufe.

Beweis. Da auch $J I'$ monoton, ist $\alpha V J I' \leq (\alpha V) V J I'$. — Sei wieder $\alpha V J I' = \beta = \lim_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$ usw., $(\alpha V) V J I' = \gamma = \lim_n \gamma_n$, $\gamma_1 = (\alpha V) V J$ usw. Wir wollen zeigen, daß es eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ gibt mit $\gamma_i < \beta_{n_i}$ ($i = 1, 2, \ldots$). Zunächst wird $\gamma_1 \leq (\alpha V J) V J = \alpha (V J)^2 \leq \alpha V J^2 < \alpha V J^{\alpha V J} = \beta_2$ (da $\alpha V J \geq 3$), also $\gamma_1 < \beta_2$, so daß wir $n_1 = 2$ setzen können. Sei $\gamma_i < \beta_{n_i}$ für $i \leq p$ bewiesen. Dann wird $\gamma_{p+1} = (\alpha V) V J^{\gamma_p} \leq (\alpha V J^{\gamma_p}) V J^{\gamma_p} = \alpha (V J^{\gamma_p})^2 \leq \alpha V (J^{\gamma_p})^2 = \alpha V J^{\gamma_p + \gamma_p}$. Wegen $\gamma_p < \beta_{n_p} < \alpha V J I'$ und Satz 1 ist aber $\gamma_p + \gamma_p < \alpha V J I'$, so daß es ein kleinstes $m \geq n_p$ gibt mit $\gamma_p + \gamma_p < \beta_m$. Also wird $\gamma_{p+1} < \alpha V J^{\beta_m} = \beta_{m+1}$. Setzen wir $n_{p+1} = m + 1$, so kommt $\gamma_{p+1} < \beta_{n_{p+1}}$. — Somit ist $\beta \geq \gamma$.

Ersetzen wir in (9) V durch $V J$, so folgt vermöge (4) für $\nu = 1$:

$$(\alpha V J)(V J) J I' = \alpha (V J) J I' = \alpha V J I';$$

für $\alpha V J$ statt α und $\nu = 1$ liefert (4):

$$(\alpha V J)(V J) J I' = (\alpha V J) V J I'.$$

Beides zusammen gibt

(10) $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha V J) V J I' = \alpha V J I', \\ \text{wenn } J \text{ ein monotoner Iterator erster Stufe.} \end{array} \right.$

3. Nun sollen einige Sätze folgen über die Invarianz des Zahlenwertes von Figuren $\mathfrak{F}$ (**II**, § 4, **2**) gegenüber gewissen Substitutionen.

Satz 3. *Seien α und β zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe in diesem Bereich; es möge die Gleichung $\alpha V = \beta V$ bestehen. Ist dann $\mathfrak{F}$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable vorkommt und ersetzt man α an diesen Stellen durch β, wodurch die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$ entstehe, so gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$* (im Sinn der Gleichheit des Zahlenwertes).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Regeln (2_i) und (3_i) in **II**, wenn man beachtet, daß $\alpha V^\nu = \beta V^\nu$ wird für alle $\nu \in [1, P)$.

Satz 4. *Seien α und β wieder zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe darin; es werde vorausgesetzt, daß $\alpha V I = \beta V I$ ist. $\mathfrak{F}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable so auftritt, daß sie eine Kette $\alpha(\ldots(V(\ldots(I$ beginnt, wobei $(\ldots($ eine Kette von linken Klammern bedeutet, die auch fehlen dürfen. Indem man an diesen Stellen α durch β ersetzt, ergebe sich die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Dann gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$.*

Unter einer *Kette* in einer Figur $\mathfrak{F}$ (allgemein in einer nach den Regeln der Potenzschreibweise gebildeten Figur aus Einzelzeichen; vgl. **II**, § 4, **3**, Schluß) verstehen wir eine Reihe von Einzelzeichen, die in derselben Zeile im Sinn der Links-rechts-Struktur unmittelbar aufeinander folgen. Die Hälften „(" und „)" einer Klammer ( ) gelten dabei als Einzelzeichen.

Zum Beweis des Satzes 4 braucht man nur von der Gleichung $(\alpha V I) V^\nu = (\beta V I) V^\nu$ $(\nu \in [1, P))$ auszugehen und die Regeln (2_i), (3_i) von **II** anzuwenden. Der Satz folgt so für Figuren der genannten Art, die nur in der Grundzeile Zeichen $V, I, I', \ldots$ enthalten; durch Induktion nach der Zeilenanzahl bestätigt man ihn für beliebige $\mathfrak{F}$.

Beispiel: $\left(\alpha\left(V(II')^{\alpha V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta = \left(\beta\left(V(II')^{\beta V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta$.

Bemerkung. Man kann Satz 4 nicht aus Satz 3 erhalten, indem man dort V durch VI ersetzt.

Die Voraussetzung $\alpha V I = \beta V I$ des Satzes 4 ist z.B. erfüllt für $\beta = \alpha V$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, denn es gilt sogar $(\alpha V^\nu) V I = \alpha V I$ für $\nu < \alpha V I$ [vgl. **II**, § 6, **2**, (22)].

Satz 5. *Seien α eine Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$, V und W zwei Operatoren erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und sei $\alpha V^\nu = \alpha W^\nu$ für $1 \leq \nu < P$. Dann gilt $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$, wenn $\widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$ aus der Figur $\mathfrak{F}(\alpha)$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ vermöge Ersetzung von V durch W hervorgeht.* ($\mathfrak{F}(\alpha)$ ist in **II**, § 4, **2** erklärt.)

Die Regeln (2_i), (3_i) lassen zunächst erkennen, daß $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha) = \alpha V^\xi = \alpha W^\xi$ ist [mit von $\mathfrak{F}(\alpha)$ abhängigem ξ] bei Figuren, welche die Zeichen V bzw. W und $I, I', \ldots$ nur in der Grundzeile aufweisen; Induktion nach der Zeilenanzahl vervollständigt den Beweis.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendung bringen wir noch einen Satz von ähnlichem Charakter wie Satz 4:

Satz 6. *Seien V und W zwei Operatoren erster und J ein Operator zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und es bestehe die Relation $\alpha V J = \alpha W J$ bzw. $\alpha V J I' = \alpha W J I'$ für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$. $\widetilde{\mathfrak{F}}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, J, I', I'', \ldots$, in welcher V stets eine Kette $V(\ldots(J$ bzw. $V(\ldots(J(\ldots(I'$ beginnt, worin die linken Klammern „(" auch fehlen dürfen, und $\widetilde{\mathfrak{F}}^*$ entstehe aus $\widetilde{\mathfrak{F}}$ durch Substitution von W an Stelle von V. Dann gilt $\widetilde{\mathfrak{F}} = \widetilde{\mathfrak{F}}^*$.*

Der Beweis verläuft analog wie bei Satz 4, wenn man beachtet, daß die in Satz 6 vorausgesetzten Relationen sich auch in der Form $VJ = WJ$ bzw. $VJI' = WJI'$ schreiben lassen.

Die Voraussetzung $\alpha VJI' = \alpha WJI'$ ist z. B. erfüllt für beliebige V und J, wenn $W = VJ$ gesetzt wird, denn es gilt sogar die Relation (4).

Die Sätze und Formeln dieser und der vorangehenden Ziffer lassen sich mannigfach variieren und auch auf Operatoren höherer Stufe übertragen.

4. In **II**, § 4, **3** und § 5, **5** (Schluß) wurden die Sonderfälle erwähnt, wo als Ausgangszahl des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ die Zahl $\vartheta = 1$ genommen und der Grundoperator V durch $\xi V = \xi + 1$ bzw. $\xi V = \xi \cdot 2$ erklärt wird. Für den Augenblick wollen wir mit U, W, V die folgendermaßen definierten Operatoren bezeichnen:

$$(11) \qquad \xi U = \xi + 1, \quad \xi W = \xi \cdot 2, \quad \xi V = \xi \cdot \omega \quad (\xi \in [1, P));$$

dementsprechend reden wir vom U-, W-, V-Algorithmus, indem wir uns die Iteratoren $I, I', I'', \ldots$ hinzugenommen denken.

Wir betrachten zunächst den U-Algorithmus. In **II**, Fußnote [4]) wurde bemerkt, daß $\xi UI = \xi \cdot \omega$, also $UI = V$ ist. Nach Satz 6 und anschließender Bemerkung ist daher $1UI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, also auch

$$(12) \qquad 1UII'I'' \cdots = 1VII'I'' \cdots.$$

Offenbar kann man mittels der Zeichen $1, (\,), U, I, I', I'', \ldots$ auch einen *konstruktiven* U-Algorithmus entwickeln (nach Analogie des konstruktiven V-Algorithmus von **I**). Die „vollregulären" Zahlenfiguren des konstruktiven U-Algorithmus sind nach Ersetzung von U durch V diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven V-Algorithmus, welche kein $+$-Zeichen enthalten (vgl. **II**, § 4, **3**); dasselbe gilt hinsichtlich der „vollständigen Hilfsfiguren" des U-Algorithmus.

Die Folge der natürlichen Zahlen wird im konstruktiven U-Algorithmus dargestellt durch die vollregulären Figuren

$$1,\ 1U,\ 1U^{1U},\ 1U^{1U^{1U}},\ \ldots.$$

Nachträglich kann man wieder die übliche Ziffernschreibweise als Abkürzung einführen und demgemäß zu abgekürzten regulären und abgekürzten Hilfsfiguren übergehen. Wir beschränken uns jedoch bei den folgenden Bemerkungen auf vollständige (d. h. unabgekürzte) Figuren.

Der Zusammenhang einer regulären Zahlenfigur mit ihren Hilfsfiguren ist im U-Algorithmus teilweise anders als im V-Algorithmus. So ist der Nachfolger eines vollregulären α im U-Algorithmus durch αU gegeben und das kann noch eine Hilfsfigur sein. Für $\alpha = 1U^{1U}$ z. B. hat man die Konstruktion $\left(1U^{1U}\right)U = 1U^{(1U)U} = 1U^{1U^{1U}}$, worin die beiden ersten Ausdrücke als Hilfsfiguren zu werten sind. Ist allgemein αU bzw. αU^{β} eine vollreguläre Zahlenfigur des U-Algorithmus, so gilt für ihren Nachfolger die Konstruktion $(\alpha U)U = \alpha U^{1U}$ bzw. $(\alpha U^{\beta})U = \alpha U^{\beta U}$, worin jedesmal die erste Figur als Hilfsfigur zu gelten hat; αU^{1U} ist vollregulär, $\alpha U^{\beta U}$ nur dann, wenn βU es ist (d. h. wenn β nicht die Form γU oder γU^{δ} hat). Im übrigen gelten auch im konstruktiven U-Algorithmus die Schemata $(\mathfrak{O}_n)$, $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von **I**, § 1, **5**, wobei nur $\beta + 1$ durch βU zu ersetzen ist, was allerdings zur Folge haben kann, daß die betreffende Figur nicht mehr regulär bleibt, wenn sie es vorher war [wie in $(\mathfrak{O}_1\,\mathrm{a})$]; denn βU ist möglicherweise noch Hilfsfigur. Die Schemata $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ fallen natürlich im U-Algorithmus weg[2]).

Wegen (12) erfaßt der U-Algorithmus konstruktiv denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wie der V-Algorithmus. Nach Satz 6 stellt ferner jede vollständige Zahlenfigur des konstruktiven U-Algorithmus, in welcher U stets eine Kette der Form $U(\ldots(I(\ldots(I'$ beginnt, die nämliche Zahl der zweiten Zahlenklasse dar wie die entsprechende Figur des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind nur solche Zahlen des konstruktiven U-Algorithmus, welche wenigstens das Zeichen I enthalten (von den Hilfsfiguren mit „lim" abgesehen).

Beispiel. Die Zahl $\omega^2 2 + \omega\, 2 + 3$ wird im U-Algorithmus wiedergegeben durch

$$(1(UI)^2)U^{(1(UI)^2)U^{(1UI)U^{(1UI)U^{1U^{1U}}}}}$$

und dieser Ausdruck läßt sich nur geringfügig abkürzen, indem man $1U^{1U}$ durch 3 ersetzt. Im V-Algorithmus lautet dieselbe Zahl: $1V^{1+1}(1+1)+1V(1+1)+1+1+1$, abgekürzt $1V^2 2 + 1V\,2 + 3$. Der Fortfall des $+$-Zeichens im U-Algorithmus ist somit keine praktische Vereinfachung.

5. Jetzt wollen wir den W-Algorithmus mit dem Grundoperator $W = \cdot\, 2$ [vgl. (11)] etwas näher betrachten. Es wird offenbar $\xi W^{\omega} = \xi V$ für $\xi \in [1, P)$, d. h. $W^{\omega} = V$. Für $\xi \geqq \omega$ ist nach Hilfssatz 3 in **II**, § 6, **2** die Zahl ξWI eine ε-Zahl, somit $\xi(W^{\omega})^{\xi WI} = \xi W^{\xi WI} = \xi WI$, also nach dem Prinzip der

[2]) Selbstverständlich bleiben die Konstruktionsprinzipien **I** und **II** von **I**, § 1, **3** in Kraft.

kritischen Zahlen $\xi WI \geqq \xi(W^{\omega})I$; umgekehrt muß natürlich $\xi WI \leqq \xi(W^{\omega})I$ sein. Daher gilt

$$\xi WI = \xi VI \quad \text{für} \quad \xi \geqq \omega. \tag{13}$$

Für eine natürliche Zahl n wird offenbar

$$nWI = nV = \omega. \tag{14}$$

Daher liefert (13): $(nWI)WI = (nV)VI$, also wegen **II**, § 6, **2**, (22): $n(WI)^2 = nVI$. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, gelangt man zu den Relationen

$$n(WI)^{1+\nu} = n(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad n \in [1, \omega), \qquad \nu \in [1, P) \tag{15}$$

$$\xi(WI)^{\nu} = \xi(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad \xi \in [\omega, P), \qquad \nu \in [1, P). \tag{16}$$

Nun kann man für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und jeden Operator V von erster Stufe in diesem Bereich statt (3_1) in **II** auch schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VI = \lim \left\{ \alpha V^{\beta},\ \alpha V^{\alpha V^{\beta}},\ \alpha V^{\alpha V^{\alpha V^{\beta}}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VI) \\ \qquad (\alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \quad V \text{ ein Operator erster Stufe in } [\alpha^{(0)}, P)) ; \end{array} \right. \tag{17}$$

denn jedes Glied innerhalb { } in (17) ist einerseits nicht kleiner als das entsprechende Glied innerhalb { } in **II**, (3_1), andererseits aber $< \alpha VI$. Ersetzt man in (17) α durch ξ, V durch WI und β durch 2, so kommt

$$\xi WI^2 = \xi(WI)I = \lim \left\{ \xi(WI)^2,\ \xi(WI)^{\xi(WI)^2},\ \xi(WI)^{\xi(WI)^{\xi(WI)^2}},\ \ldots \right\};$$

vermöge (15) und (16) ist für $\xi < \omega$ die Folge innerhalb der vorstehenden { } gliedweise gleich der Folge $\xi VI,\ \xi(VI)^{\xi VI},\ \xi(VI)^{\xi(VI)^{\xi VI}}, \ldots$, deren Limes ξVI^2 ist, während für $\xi \geqq \omega$ die Glieder in { } ihren Wert behalten, wenn W durch V ersetzt wird. Also wird immer $\xi WI^2 = \xi VI^2$ für $\xi \in [1, P)$, d.h. $WI^2 = VI^2$. Das aber liefert

$$\xi WI^{\nu} = \xi VI^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu \in [2, P), \ \xi \in [1, P). \tag{18}$$

Analog zu (17) hat man nun die Relation

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VJI' = \lim \left\{ \alpha VJ^{\beta},\ \alpha VJ^{\alpha VJ^{\beta}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VJI'), \\ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \ V \text{ bzw. } J \text{ ein Operator erster bzw. zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{array} \right. \tag{19}$$

Setzt man in (19) und in der aus ihr durch die Substitution von W an Stelle von V entstehenden Relation $\alpha = \xi$, $J = I$, $\beta = 2$, so kommt vermöge (18):

$$\xi WII' = \xi VII' \quad \text{für} \quad \xi \in [1, P). \tag{20}$$

Somit läßt sich auf die Operatoren V und W der Satz 6 anwenden; insbesondere wird $1WI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und

$$1WII'I'' \ldots = 1VII'I'' \ldots . \tag{21}$$

Mit den Zeichen $1, (\ ), +, W, I, I', I'', \ldots$ kann man wieder einen *konstruktiven* W-Algorithmus aufbauen, indem man zunächst folgende Schemata benützt:

$(\mathfrak{N})$ $\qquad \xi + 1 = \text{Nachfolger von } \xi;$

$(\mathfrak{W})$ $\qquad (1)\quad \xi + \xi = \xi W \qquad (2)\quad \eta + \xi + \xi = \eta + \xi W.$

$\xi + 1$ kann für jedes vollreguläre ξ gebildet werden, ist aber eventuell noch Hilfsfigur, nämlich genau dann, wenn $\xi = \eta + 1$ ist. Denn nach $(\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{W}, 2)$ wird $\eta + 1 + 1 = \eta + 1W$. Das Schema $(\mathfrak{W})$ wird nur angewendet, wenn die vollreguläre Figur ξ kein $+$-Zeichen in der Grundzeile enthält. Solche vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus nennen wir *W-Potenzen*.

Jede vollreguläre Zahl α hat im konstruktiven W-Algorithmus die Form

$$(22) \qquad \alpha = \chi_1 + \cdots + \chi_q + 1, \quad \chi_1 > \cdots > \chi_q,$$

worin die χ_i W-Potenzen bedeuten; q kann gleich 1 sein und $+1$ kann fehlen. In $(\mathfrak{W}\ 2)$ ist $\eta + \xi$ von der Form (22), also $\xi = \chi_q$ oder $\xi = 1$; $\eta + \xi W$ kann noch Hilfsfigur sein, desgleichen ξW selbst.

An die Stelle der Schemata $(\mathfrak{A})$ in **I**, § 1, **5** tritt dieses:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \zeta + \lambda = \lim_n (\zeta + \gamma_n), \qquad \lambda = \lim_n \gamma_n,$$

wo λ vollregulär ist. $(\mathfrak{L})$ darf in folgenden Fällen angewandt werden:

1. $\zeta = \chi_1 + \cdots + \chi_q$, $\lambda = \chi_{q+1} + \cdots + \chi_{p+q}$ mit $\chi_q > \chi_{q+1}$; also $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q+p}$.
2. ζ wie zuvor, aber mit $q > 1$; $\lambda = \chi_q$; $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q-1} + \chi_q W$. 3. $\zeta = \lambda = \chi_1$ $(q = 1)$; $\zeta + \lambda = \chi_1 W$. Im ersten Fall ist $\zeta + \lambda$ vollregulär; im 2. und 3. Fall, wo das Schema $(\mathfrak{W})$ herangezogen wird, ist $\zeta + \lambda$ möglicherweise Hilfsfigur.

Ist in (22) χ_i Limeszahl, so auch $\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$.

Das Schema $(\mathfrak{W})$ (**I**, § 1, **5**) des konstruktiven V-Algorithmus fällt weg, die Schemata $(\mathfrak{O}_n)$, $(\mathfrak{Z})$, $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ daselbst gelten ungeändert auch im konstruktiven W-Algorithmus[3]).

Die vollregulären Zahlenfiguren des W-Algorithmus sind, nach Ersetzung von W durch V, diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des V-Algorithmus von **I**, welche keine Kombination $1+1$ als Teilfigur enthalten (vgl. **II**, § 5, **5**, Schluß). Ferner werden alle vollständigen Hilfsfiguren des V-Algorithmus, in denen keine Zeichengruppe $1+1$ auftritt, nach Substitution von W an Stelle von V zu vollständigen Hilfsfiguren des W-Algorithmus, freilich ohne daß damit der Bereich der letzteren erschöpft würde.

[3]) Die Konstruktionsprinzipien **I**, **II** aus **I**, § 1, **3** bleiben natürlich wieder bestehen.

Die Reihe der natürlichen Zahlen, d.h. der Zahlen $< 1^W I$, wird dargestellt durch

$$1;\ 1+1=\underline{1^W};\ \underline{1^W+1};\ 1^W+1+1=1^W+1^W=(1^W)^W=1^{W^{1+1}}=$$
$$\underline{1^{W^{1^W}}};\ \underline{1^{W^{1^W}}+1};\ 1^{W^{1^W}}+1+1=\underline{1^{W^{1^W}}+1^W};\ \underline{1^{W^{1^W}}+1^W+1};$$
$$1^{W^{1^W}}+1^W+1+1=1^{W^{1^W}}+1^W+1^W=1^{W^{1^W}}+(1^W)^W=1^{W^{1^W}}$$
$$+1^{W^{1+1}}=1^{W^{1^W}}+1^{W^{1^W}}=\left(1^{W^{1^W}}\right)^W=\underline{1^{W^{1^W+1}}};\ldots,$$

wobei die unterstrichenen Ausdrücke vollregulär sind. Man sieht, daß zu den vorhin genannten Hilfsfiguren des W-Algorithmus noch solche hinzukommen, in denen die Kombination $1+1$ genau einmal auftritt. — Ersetzen wir in den obigen unterstrichenen Figuren W durch $\cdot 2$, so erhalten wir nach Weglassung der Faktoren 1 die Darstellung der natürlichen Zahlen als Summen von Zweierpotenzen. Es wäre daher angemessen, die abgekürzten Figuren des konstruktiven W-Algorithmus mittels des dualen Ziffernsystems einzuführen.

Wegen (21) ist der vom konstruktiven W-Algorithmus erfaßte Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wieder derselbe wie beim konstruktiven V-Algorithmus. Nach Satz 6 und den Formeln (16) und (18) gibt es eine ganze Kategorie von Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus, welche dieselbe Zahl der zweiten Zahlenklasse repräsentieren wie die entsprechenden Figuren des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind wieder nur diejenigen Zahlen des konstruktiven W-Algorithmus, die wenigstens das Zeichen I enthalten.

§ 8. Definition neuer Operatoren mittels gegebener Operatoren.

1. Man kann den Algorithmus erweitern, indem man im Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ gleichzeitig mehrere Operatoren derselben Stufe zuläßt und damit natürlich auch deren „Produkte". Unter dem *Produkt* $U \times V$ zweier Operatoren U, V von erster Stufe verstehen wir den durch $\alpha U \times V = (\alpha U) V$ erklärten Operator erster Stufe. Es lassen sich auch Produkte von beliebig vielen Operatoren erster Stufe V_ν, $\nu \in [0, \sigma)$, $\sigma < P$, erklären durch die induktive Definition

$$\alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma+1} = \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \times V_\sigma, \quad \alpha V_\nu \prod_{\nu<\lambda} = \lim_{\sigma<\lambda} \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \qquad (\lambda \text{ Limeszahl}).$$

Diese Produktbildung ist assoziativ; $V_\nu \prod_{\nu<\sigma}$ ist wieder ein Operator erster Stufe.

Entsprechend definiert man die Produkte von beliebig vielen Operatoren der n-ten Stufe. Sind z.B. $J, \bar{J}$ zwei Operatoren zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so ist der Operator zweiter Stufe $J \times \bar{J}$ zu definieren durch $\alpha V J \times \bar{J} = \alpha (V J) \bar{J}$, unter α eine beliebige Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und unter V einen beliebigen Operator erster Stufe darin verstanden.

2. Mit der vorstehend skizzierten Produktbildung wollen wir uns hier nicht näher beschäftigen, sondern einige Beispiele für eine andersartige Gewinnung

neuer Operatoren betrachten. Die Definitionen (3) in II, § 4, **1** legen folgende Erklärungen nahe:

$$(23_1) \qquad \alpha V I = \lim_p \alpha V_p; \quad \alpha V_1 = \alpha V, \ \alpha V_{p+1} = \alpha V^{\alpha V_p}$$

$$(23_2) \qquad \alpha V J I' = \lim_p \alpha V J_{0p}; \quad \alpha V J_{01} = \alpha V J, \ \alpha V J_{0,p+1} = \alpha V J^{\alpha V J_{0p}}$$

$$(23_{n+2}) \qquad \begin{cases} \alpha V J \dots J_n I^{(n+1)} = \lim_p \alpha V J \dots J_{n-1} J_{np}, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n,p+1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{\alpha V J \dots J_{n-1} J_{np}}. \end{cases}$$

$V_p, J_{0p}, \dots, J_{np}$ sind Operatoren 1., 2., ..., $(n+2)$. Stufe. V_p ist eine V-monotone V-Potenz; die J_{np} $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sind monotone Iteratoren $(n+1)$. Stufe, wenn die J_n es sind (vgl. § 7, **1**). — Insbesondere schreiben wir

$$(24) \qquad J_{0p} = I_p \quad \text{für} \quad J = I, \qquad J_{np} = I_p^{(n)} \quad \text{für} \quad J_n = I^{(n)}.$$

Eingehender wollen wir uns nun dem folgendermaßen auf Grund eines Operators erster Stufe V definierten Operator $\overline{V}$ zuwenden:

$$(25) \qquad \alpha \overline{V} = \alpha V^{\alpha} \quad \big(\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)\big).$$

Wegen $\alpha V^{\alpha} \geqq \alpha + \alpha = \alpha 2$ (vgl. II, § 6, **2**, (19a)) gilt

$$(26) \qquad \alpha \overline{V} \geqq \alpha \cdot 2,$$

d.h. nach Hilfssatz 3 daselbst ist $\alpha \overline{V} I$ eine ε-Zahl für $\alpha \geqq \omega$.

Es wird ferner $\alpha \overline{V}^2 = (\alpha \overline{V}) \overline{V} = (\alpha \overline{V}) V^{\alpha \overline{V}} = (\alpha V^{\alpha}) V^{\alpha \overline{V}} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V}}$. Nach II, § 6, **2**, Hilfssatz 2 ist $\alpha + \alpha \overline{V} < \alpha V I$, also auch $\alpha \overline{V}^2 < \alpha V I$. Ebenso folgt $\alpha \overline{V}^3 = (\alpha \overline{V}^2) V^{\alpha \overline{V}^2} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V} + \alpha \overline{V}^2} < \alpha V I$ usw. Andererseits ist $\alpha \overline{V} \geqq \alpha V$, $\alpha \overline{V}^2 \geqq \alpha V^{\alpha V} = \alpha V_1$, $\alpha \overline{V}^3 \geqq \alpha V^{\alpha V_1} = \alpha V_2$ usf. Daraus schließt man:

$$(27) \qquad \alpha \overline{V}^{\omega} = \alpha V I \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

$\overline{V}$ ist offenbar eine V-monotone V-Potenz. Es gilt außerdem:

Hilfssatz 1. *Ist ein Operator erster Stufe $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit der Eigenschaft* (27), *so ist $\overline{V} I$ eine $V I$-monotone $V I$-Potenz.*

Beweis. Nach II, Hilfssatz 2 gilt $\alpha \overline{V} I = \omega \cdot \omega^{\mu}$, $\mu \geqq 0$. Also wird $\alpha \overline{V} I = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\omega \cdot \omega^{\mu}} = \alpha (\overline{V}^{\omega})^{\omega^{\mu}} = \alpha (V I)^{\omega^{\mu}}$ (vermöge (27) ist ja $\overline{V}^{\omega} = V I$). $\overline{V} I$ ist somit eine $V I$-Potenz. Da $\overline{V} I$ zugleich eine V-monotone V-Potenz ist, muß $\overline{V} I$ auch $V I$-monoton sein.

Für $\alpha \geqq \omega$ wird $\alpha (\overline{V}^{\omega})^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V} I$, also nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\alpha \overline{V} I \geqq \alpha (\overline{V}^{\omega}) I$. Umgekehrt ist natürlich $\alpha (\overline{V}^{\omega}) I \geqq \alpha \overline{V} I$.

Somit kommt in Verbindung mit (27):

$$\alpha(\overline{V}^{\omega})I = \alpha\overline{V}I = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha \geq \omega, \qquad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P). \tag{28}$$

Wir wollen nun zeigen, daß gilt:

$$\alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \qquad \nu \in [\omega, P). \tag{29}$$

Für diejenigen α, welche die Gleichung $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$ erfüllen, gewinnt man (29) induktiv aus (28), sogar für $\nu < \omega$, indem man dort α durch $\alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \sigma, \ldots$ $(\sigma < P)$ ersetzt. Ist aber $\alpha\overline{V}I \neq \alpha VI^2$, so ist $\alpha\overline{V}I < \alpha VI^2 = \alpha(VI)I$ (denn es gilt $\overline{V} < VI$, und beide Operatoren sind V-monotone V-Potenzen, woraus $\alpha\overline{V}I \leq \alpha VI^2$ folgt). Wegen $\alpha\overline{V}I \geq \omega$ liefert (28): $\alpha(\overline{V}I)^2 = (\alpha\overline{V}I)\overline{V}I = (\alpha\overline{V}I)VI^2 = (\alpha\overline{V}I)(VI)I$. Wegen Hilfssatz 1 und $\alpha\overline{V}I < \alpha(VI)I$ kann man auf den letzten Ausdruck der vorstehenden Kette von Gleichungen die Sätze 7 und 10 aus II, § 6, **4** für $n = 1$ anwenden, indem man α mit ϑ und VI mit dem dortigen V identifiziert sowie $\alpha\overline{V}I$ als Ausgangsvariable ξ ansieht. Dann wird $(\alpha\overline{V}I)(VI)I = \alpha(VI)I$, d.h.

$$\alpha(\overline{V}I)^2 = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha\overline{V}I < \alpha VI^2. \tag{30}$$

Aus (30) gewinnt man aber induktiv vermöge (28) (analog wie (29) aus $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$): $\alpha(\overline{V}I)^{1+\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu \in [1, P)$, also wiederum (29).

Ersetzt man in (17) β durch ω und V durch $\overline{V}I$ bzw. VI^2, so ergibt sich vermöge (29): $\alpha(\overline{V}I)I = \alpha(VI^2)I$, d.h.

$$\alpha\overline{V}I^2 = \alpha VI^3 \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P). \tag{31}$$

Die Relation (31) kann man übrigens auch mittels des Prinzips der kritischen Zahlen gewinnen. Denn nach (29) wird $\alpha\overline{V}I^2 = \alpha(\overline{V}I)^{\alpha\overline{V}I^2} = \alpha(VI^2)^{\alpha\overline{V}I^2}$, also $\alpha\overline{V}I^2 \geq \alpha VI^3$. Ebenso folgt $\alpha VI^3 \geq \alpha\overline{V}I^2$.

Aus (31), oder, was dasselbe ist, aus $\overline{V}I^2 = VI^3$ erhält man durch Induktion die Relationen

$$\left\{\begin{array}{lll} (1) & \alpha\overline{V}I^n = \alpha VI^{n+1} & (n = 2, 3, \ldots) \\ (2) & \alpha\overline{V}I^{\nu} = \alpha VI^{\nu} & (\nu \geq \omega) \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P). \tag{32}$$

Aus (32, 2) erschließt man auf analoge Weise wie (31) aus (29), d.h. vermöge (19) mit $\beta = \omega$ und $J = I$ oder mittels des Prinzips der kritischen Zahlen die Relation

$$\alpha\overline{V}II' = \alpha VII' \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P). \tag{33}$$

3. *Vermöge* (33) *kann man auf* V *und* $\overline{V}$ *statt* V *und* W *den Satz* 6 *mit* $J = I$ *anwenden.* — Bei der Herleitung von (33) wurde nur benützt, daß $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit $\overline{V} \geq \cdot 2$ ist, welche die Bedingung (27) erfüllt. Also gilt vorstehende Aussage für alle Operatoren $\overline{V}$ von erster Stufe, welche diese Eigenschaften besitzen. Das trifft unter anderem zu für die in (23_1)

erklärten Operatoren V_p mit $p=2,3,\ldots$. Wegen $V_p>\overline{V}\geqq\cdot 2$ ist sogar $V_p>\cdot 2$. Außerdem gilt $\alpha\overline{V}^{\omega}\leqq\alpha V_p^{\omega}$. Andererseits hat man $\alpha V_p^n<\alpha VI$, wie man folgendermaßen einsieht.

Sei $\beta<\alpha VI$, also $\alpha V^{\beta}<\alpha VI$. Dann wird nach Hilfssatz 2 aus **II** auch $(\alpha V^{\beta})V_1=\alpha V^{\beta+1}<\alpha VI$, $(\alpha V^{\beta})V_2=(\alpha V^{\beta})V^{(\alpha V^{\beta})V_1}=\alpha V^{\beta+(\alpha V^{\beta})V_1}<\alpha VI$, $(\alpha V^{\beta})V_3=\alpha V^{\beta+(\alpha V^{\beta})V_2}<\alpha VI$ usw., allgemein

$$(34)\qquad (\alpha V^{\beta})V_p=\alpha V^{\gamma_p}<\alpha VI \quad\text{für}\quad \beta<\alpha VI,\quad p=1,2,3,\ldots.$$

Setzt man hierin $\beta=\alpha V_{p-1}$ für $p=2,3,\ldots$, so kommt nach (23_1): $(\alpha V_p)V_p=\alpha V_p^2=\alpha V^{\gamma_p^{(2)}}<\alpha VI$. Daraus ergibt sich $\alpha V_p^3=\alpha V^{\gamma_p^{(3)}}<\alpha VI$ usw., d.h. $\alpha V_p^{\omega}\leqq\alpha VI=\alpha\overline{V}^{\omega}$. — Somit wird $\alpha V_p^{\omega}=\alpha\overline{V}^{\omega}$ und daher nach (27)

$$(35)\qquad \alpha V_p^{\omega}=\alpha VI \quad\text{für}\quad p=2,3,\ldots,\quad \alpha\in[\alpha^{(0)},P).$$

Demnach ist auch

$$(36)\qquad \alpha V_pII'=\alpha VII' \quad\text{für}\quad p=2,3,\ldots,\quad \alpha\in[\alpha^{(0)},P).$$

Nach Satz 6 ist somit $\vartheta VI\ldots I^{(n)}=\vartheta V_pI\ldots I^{(n)}$ für $n=1,2,\ldots$ und $\vartheta\in[\alpha^{(0)},P)$. Nach **II**, Satz 5 und 10 gelangt man daher niemals aus dem Bereich $[1,\vartheta VI\ldots I^{(n)})$ heraus, wenn man Figuren $\mathfrak{F}^{*(n+1)}$ bildet, welche durch die Substitution $V\to V_p$ aus solchen Figuren $\mathfrak{F}^{(n+1)}$ (s. **II**, § 6, **1**) hervorgehen, deren Zahlenvariable Zahlen $<\vartheta VI\ldots I^{(n)}$ bedeuten und deren Kernvariable insbesondere Zahlen aus $\{\vartheta V^{\nu}\}_{\nu<\vartheta VI\ldots I^{(n)}}$ darstellen.

Analoge Ergebnisse lassen sich hinsichtlich der durch (24) erklärten Iteratoren I_p, I_p', I_p'' gewinnen; vgl. § 7, **3**, Schlußbemerkung.

4. Man kann die durch (23) definierten Operatoren V_p, J_{0p}, J_{np} auch mittels gewisser Iteratoren $\overline{I}_p^{(n)}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ darstellen:

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha V_{p+1}=\alpha V\overline{I}_p(\overline{I}_p^{(0)}=\overline{I}_p);\quad \alpha VJ_{0,p+1}=\alpha VJ\overline{I}_p;\\ \alpha VJ\ldots J_{n-1}J_{n,p+1}=\alpha VJ\ldots J_{n-1}J_n\overline{I}_p^{(n+1)}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\ldots)\end{array}\right\}\ p=1,2,\ldots.$$

$\overline{I}_p^{(n)}$ ist offenbar ein monotoner Iterator $(n+1)$. Stufe. — Ebenso kann man den durch (25) gegebenen Operator $\overline{V}$ für $\alpha>1$ mittels eines monotonen Iterators I_0 von erster Stufe repräsentieren in der Form

$$(38)\qquad \alpha\overline{V}=\alpha VI_0=\alpha V^{\alpha} \quad\text{für}\quad \alpha\in[\alpha^{00},P),\qquad \alpha^{00}=\max(\alpha^{(0)},2).$$

Hinsichtlich I_0 wollen wir einige Formeln herleiten. (27) und (28) schreiben sich jetzt so:

$$(39)\qquad \alpha(VI_0)^{\omega}=\alpha VI \quad\text{für}\quad \alpha\in[\alpha^{00},P)$$

$$(40)\qquad \alpha(VI_0)I=\alpha VI^2 \quad\text{für}\quad \alpha\in[\alpha^{00},P),\qquad \alpha\geqq\omega.$$

Zunächst zeigen wir

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{ll}(1)\quad \alpha(VI_0^{\nu})I=\alpha VI^{\nu+1} & (\nu\geqq 1)\\ (2)\quad \alpha VI_0^{\lambda}=\alpha VI^{\lambda} & (\lambda \text{ Limeszahl})\end{array}\right\}\ \alpha\geqq\omega.$$

Beweis. Angenommen, (41) sei richtig für alle $\nu<\xi$, $\lambda<\xi$ [für $\xi=2$ wegen (40) zutreffend]. Ist ξ eine Limeszahl der Form $\omega^2\sigma=\omega(\omega\sigma)$, so kann man eine Fundamentalfolge $\xi_\tau\to\xi$ angeben, die aus lauter Limeszahlen besteht. Folglich ist $\alpha VI_0^{\xi}=\lim\limits_{\tau}\alpha VI_0^{\xi_\tau}=\lim\limits_{\tau}\alpha VI^{\xi_\tau}=\alpha VI^{\xi}$. — Sei nun ξ eine Limeszahl der Form $\sigma+\omega$, $\sigma=0$ oder σ Limeszahl. Es wird nach (39), d.h. wegen $(VI_0)^{\omega}=VI$ in $[\alpha^{00},P)$, für $n\geqq 1$: $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}=\alpha(VI_0^{\sigma+n})I_0=\alpha(VI_0^{\sigma+n})^{\chi}\geqq\alpha(VI_0^{\sigma+n})^{\omega}=\alpha\big((VI_0^{\sigma+n-1})I_0\big)^{\omega}=\alpha(VI_0^{\sigma+n-1})I=\alpha VI^{\sigma+n}$ (Induktionsvoraussetzung!), mithin $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}\geqq\alpha VI^{\sigma+n}$, folglich $\alpha VI_0^{\xi}=\alpha VI_0^{\sigma+\omega}\geqq\alpha VI^{\xi}$. Andererseits ist $\alpha VI_0^{\xi}\leqq\alpha VI^{\xi}$ wegen $I_0<I$ (s. die letzte Relation im vorletzten Absatz von § 7, **1**). Also ist wieder $\alpha VI_0^{\xi}=\alpha VI^{\xi}$. — Ist endlich $\xi=\eta+1$, so kommt vermöge (40), angewandt auf VI_0^{η} statt V: $\alpha(VI_0^{\xi})I=\alpha(VI_0^{\eta+1})I=\alpha\big((VI_0^{\eta})I_0\big)I=\alpha(VI_0^{\eta})I^2=\alpha\big((VI_0^{\eta})I\big)I=\alpha(VI^{\eta+1})I=\alpha VI^{\xi+1}$ (Induktionsvoraussetzung!). — Nebenbei haben wir gefunden:

$$(42)\qquad \alpha(VI_0^{\nu+1})^{\omega}=\alpha VI^{\nu+1}\quad\text{für}\quad\alpha\geqq\omega,\ \nu\geqq 0.$$

Aus (41, 2) schließt man:

$$(43)\qquad \alpha VI_0I'=\alpha VII'\quad\text{für}\quad\alpha\geqq\omega.$$

Da nämlich $\alpha VI_0I'$ eine Limeszahl, so wird $\alpha VI_0I'=\alpha VI_0^{\alpha VI_0I'}=\alpha VI^{\alpha VI_0I'}$, daher $\alpha VI_0I'\geqq\alpha VII'$; ebenso folgt $\alpha VII'\geqq\alpha VI_0I'$.

Die Relationen (40) bis (43) sind eine Folge von (39) in Verbindung mit $VI_0\geqq\cdot 2$ [man beachte die Herleitung von (28) aus (27)] und dem Umstand, daß I_0 ein monotoner Iterator erster Stufe $<I$ ist; sie gelten also für alle Iteratoren erster Stufe J mit den genannten Eigenschaften von I_0, insbesondere für $J=\bar I_p$ ($p=1,2,\ldots$), wie aus $I_0<\bar I_p$ und (35), (37) folgt, desgleichen für $J=I_0^{+}$, wenn $\alpha VI_0^{+}=\alpha V^{\alpha+1}=(\alpha VI_0)V$ gesetzt wird (denn $I_0<I_0^{+}\leqq\bar I_1$).

Für unsere weiteren Schlüsse wollen wir nur (43) zugrunde legen. Wir nehmen daher jetzt an, J sei ein monotoner Iterator erster Stufe $\leqq I$ im Bereich $[\alpha^{00},P)$, $\alpha^{00}\geqq\alpha^{(0)}$, und V ein beliebiger Operator erster Stufe im selben Bereich (was natürlich für alle V in $[\alpha^{(0)},P)$ zutrifft), und es gelte

$$(44)\qquad \alpha VJI'=\alpha VII'\quad\text{für}\quad\alpha\geqq\omega,\quad\alpha\in[\alpha^{00},P),\quad V\text{ in }[\alpha^{00},P).$$

Ein solches J ist nach dem vorstehenden I_0 mit $\alpha^{00}=\max(2,\alpha^{(0)})$, ebenso $\bar I_p$ ($p=1,2,\ldots$) und I_0^{+} ($\alpha VI_0^{+}=\alpha V^{\alpha+1}$), beide mit $\alpha^{00}=\alpha^{(0)}$. — Wenn $\alpha^{00}\geqq\omega$, so besagt (44), daß $JI'=II'$ ist. Im Fall $\alpha^{00}<\omega$ gilt wegen $J\leqq I$ für $\alpha\in[\alpha^{00},\omega)$: $\alpha VJI'\leqq\alpha VII'$. Wir haben also nur die Möglichkeiten $\alpha VJI'=\alpha VII'$ und

$\alpha V J I' < \alpha V I I'$, wenn ein Paar α, V in $[\alpha^{00}, P)$ gegeben ist. — Zunächst wird

(45_1) $\alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq 0$ und $\alpha V J I' = \alpha V I I'$,

(45_2) $\alpha(V J I')^{1+\nu} = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq 1$ und $\alpha V J I' < \alpha V I I'$, also

(45_3) $\alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq \omega$, $\alpha \in [\alpha^{00}, P)$.

Beweis. (45_1) folgt induktiv aus (44), indem man dort α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$, $\alpha(V J I')^2 = \alpha(V I I')^2, \ldots, \alpha(V J I')^\omega = \alpha(V I I')^\omega, \ldots$ ersetzt. — (45_2) folgt so. Die Sätze 7 und 10 in II liefern:

(46) $(\alpha V J I') V I I' = \alpha V I I'$ für $\alpha V J I' < \alpha V I I'$.

Aus (44) entnimmt man bei Ersetzung von α durch $\alpha V J I'$:

(47) $(\alpha V J I') V J I' = (\alpha V J I') V I I'$ für $\alpha \in [\alpha^{00}, P)$.

(46) und (47) zusammen ergeben

(48) $\alpha(V J I')^2 = \alpha V I I'$ für $\alpha V J I' < \alpha V I I'$.

Aus (48) findet man jetzt (45_2) vermöge (44) durch eine analoge Schlußweise, wie sie vorhin angewendet wurde.

Nun zeigen wir, daß

(49) $\alpha V(J I')^2 = \alpha V(I I')^2$ für alle α und V in $[\alpha^{00}, P)$.

Beweis. (44) liefert mit $V J I'$ und $\alpha V J I'$ an Stelle von V und α:

(50) $(\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V J I')(V J I') I I'$.

1. Fall: $\alpha V J I' = \alpha V I I'$. Wir ersetzen in (45_1) α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$ und erhalten vermöge Satz 5:

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Diese Relation liefert zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Hieraus erhält man durch geeignete Anwendung von (9): $\alpha(V J I') J I' = \alpha(V I I') I I'$, also (49).

2. Fall: $\alpha V J I' < \alpha V I I'$. Dann gilt (46); wir wenden Satz 3 an, indem wir $\alpha V J I'$ mit β und $V I I'$ mit V identifizieren. Das liefert $(\alpha V J I')(V I I') I I' = \alpha(V I I') I I'$, also

$$(\alpha V J I') V(I I')^2 = \alpha V(I I')^2.$$

Indem wir in (45_1) α durch $\alpha V J I' \geqq \omega$ ersetzen und Satz 5 anwenden, erhalten wir

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V J I')(V I I') I I' = (\alpha V J I') V(I I')^2.$$

Die beiden letzten Relationen liefern zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = \alpha V(I I')^2.$$

Durch geeignete Anwendung von (9) folgt:

$$(\alpha V J I')\,(V J I')\,J I' = \alpha (V J I')\,J I' = \alpha V (J I')^2.$$

Damit ist (49) auch im zweiten Fall bestätigt.

(49) besagt, daß $(J I')^2 = (I I')^2$ ist. Daher hat man

$$\alpha V (J I')^{2\nu} = \alpha V (I I')^{2\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1, \ \alpha \text{ und } V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$$

Diese Relation drückt die Gleichheit $V(J I')^{2\nu} = V(I I')^{2\nu}$ aus. Daraus findet man durch entsprechende Anwendung von (9) und (44) die Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha V (J I')^{2\nu+1} &= \alpha \left(V (J I')^{2\nu}\right) J I' = \alpha \left(V (I I')^{2\nu}\right) J I' = \left(\alpha V (I I')^{2\nu}\right) \left(V (I I')^{2\nu}\right) J I' \\ &= \left(\alpha V (I I')^{2\nu}\right) \left(V (I I')^{2\nu}\right) I I' = \alpha \left(V (I I')^{2\nu}\right) I I' = \alpha V (I I')^{2\nu+1}.\end{aligned}$$

Damit hat sich ergeben:

(51) $\quad \alpha V (J I')^{\nu} = \alpha V (I I')^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2 \text{ und alle } \alpha, \ V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$

Von (51) aus erhält man auf ähnliche Weise wie seinerzeit (33) von (32, 2) aus:

(52) $\quad \alpha V J I'^2 = \alpha V I I'^2 \quad \text{für alle } \alpha, V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$

Diese Gleichung kann man übrigens auch direkt aus (49) mittels (8) gewinnen. Da nach (52) $J I'^2 = I I'^2$, so findet man induktiv

(53) $\quad \alpha V J I'^{\nu} = \alpha V I I'^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2 \text{ und alle } \alpha, V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$

Aus (53) endlich erhält man analog wie (52) aus (51):

(54) $\quad \alpha V J I' I'' = \alpha V I I' I'' \quad \text{für alle } \alpha, V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$

Auf Grund eines leicht zu beweisenden Analogons zu Satz 6 kann man aus (54) schließen, daß im Bereich $[\alpha^{00}, P)$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$, in welcher I vorkommt, und zwar stets als erstes Zeichen einer Kette $I(\ldots(I'(\ldots(I''$, ihren Zahlenwert behält, wenn man in ihr I durch J ersetzt. — Man kommt also mit dem „schwachen" I_0 oder I_0^+ $(\alpha V I_0^+ = \alpha V^{\alpha+1})$ genau so weit wie mit I, und zwar, wie (49) zeigt, schon „am Anfang" des Algorithmus der $I', I'', \ldots$.

Die Betrachtungen dieser Ziffer lassen sich in ähnlicher Weise für solche Operatoren höherer als zweiter Stufe durchführen, die analog wie I_0 erklärt sind.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1953.)

Schöneborn, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 17—30 (1954)

Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. II.

Von
Heinz Schöneborn.

Im Anschluß an die im ersten Teil dieser Arbeit[1]) durchgeführten Untersuchungen soll hier die Charakterentheorie der Abelschen torsionstopologischen Gruppen entwickelt werden, welche den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen als „natürlichen Operatorenbereich" besitzen (vgl. S. Nr. 3), d.h. also primär und zyklovollständig im Sinne von S. Nr. 4 sind. Soweit nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, sollen im folgenden unter „Gruppen" stets Gruppen der obengenannten Art, unter „Untergruppen" stets abgeschlossene $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppen verstanden sein. Im übrigen wird die Terminologie und Bezeichnungsweise des ersten Teiles der Arbeit übernommen.

1. Wir betrachten zunächst die kompakten Untermengen der Gruppe A und beweisen

Satz 1. a) Besitzt die Gruppe A ein kompaktes (topologisches) Erzeugendensystem $\{a_\alpha\}$, dann ist die Restklassengruppe A/A_α für jede charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ endlich. Ist A außerdem vollständig, so kompakt.

b) Eine Gruppe A mit kompaktem Erzeugendensystem enthält nur Elemente $(\neq 0)$ von endlicher Höhe.

c) Eine höhenendliche K-topologische Gruppe A ist kompakt.

d) Eine höhenendliche S-topologische Gruppe A ist genau dann kompakt, wenn A endlichrangig ist[2]).

Beweis. a) $\hat{A}$ sei die vollständige Hülle von A, dann ist $\{a_\alpha\}$ ein topologisches Erzeugendensystem von $\hat{A}$. Ist $\hat{A}_\alpha$ die aus der charakteristischen Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ durch Abschließung hervorgehende charakteristische Untergruppe von $\hat{A}$, dann ist $\bar{\bar{A}} = \hat{A}/\hat{A}_\alpha$ diskret und eine Torsionsgruppe, denn jede Restklasse von $\hat{A}_\alpha$ in $\hat{A}$ enthält ein Element aus A und dieses ist von endlicher Ordnung mod A_α, erst recht also mod $\hat{A}_\alpha$. Die den $a_\alpha \in \hat{A}$ entsprechenden Elemente $\bar{a}_\alpha \in \bar{\bar{A}}$ bilden andererseits ein kompaktes, wegen der Diskretheit von $\bar{\bar{A}}$ also endliches Erzeugendensystem von $\bar{\bar{A}}$ und da $\bar{\bar{A}}$ eine

[1]) Schöneborn, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I. Math. Z. **59**, 455—483 (1954). Im folgenden kurz mit „S." zitiert.

[2]) Jede S-topologische Gruppe A mit kompaktem Erzeugendensystem und mit dem natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ ist sogar kompakt, denn anderenfalls wäre sie von unendlichem Rang und die im Beweis von Satz 1 b) ausgeführte Konstruktion liefert die Existenz einer charakteristischen Untergruppe von A von unendlichem Index — im Widerspruch zu Satz 1 a). — Darüberhinaus sieht man übrigens leicht, daß A sogar vollständig ist.

Torsionsgruppe ist, ist $\bar{\hat{A}}$ endlich. Aus der gruppentheoretischen Beziehung $A/A_\alpha = A/(\hat{A}_\alpha \cap A) = (A + \hat{A}_\alpha)/\hat{A}_\alpha \subseteqq \hat{A}/\hat{A}_\alpha = \bar{\hat{A}}$ folgt dann die Endlichkeit von A/A_α. Die letzte Behauptung von a) ist jetzt trivial. b) $\hat{A}$ sei wieder die vollständige Hülle von A, $a \neq 0$ ein Element von unendlicher Höhe aus $\hat{A}$. Ferner sei $\hat{A}_\alpha$ eine charakteristische Untergruppe von $\hat{A}$ mit $a \notin \hat{A}_\alpha$. Dann ist in $\hat{A}/\hat{A}_\alpha$ die a enthaltende Restklasse $\bar{a} \neq \bar{0}$ von unendlicher Höhe, also $\hat{A}/\hat{A}_\alpha$ sicher nicht endlich und $\hat{A}$ nicht kompakt — im Widerspruch zu a). c) Sei A_α eine charakteristische Untergruppe von A. Dann ist A/A_α höhenendlich[3]) und endlichrangig, also endlich und somit A kompakt. d) Ist A endlichrangig, so fallen K- und S-Topologie zusammen und die eine Hälfte von d) folgt aus dem schon Bewiesenen. Ist A von unendlichem Rang, so gibt es eine einrangig direkt zerlegbare Untergruppe $A_0 = \sum \oplus Y_\alpha \subseteqq A$ mit unendlich vielen einrangigen Summanden Y_α[4]). Ist Y'_α eine echte charakteristische Untergruppe von Y_α, so ist $A'_0 = \sum \oplus Y'_\alpha < A_0$ eine echte charakteristische Untergruppe von A_0 (vgl. S. Nr. 1) und A_0/A'_0 ist unendlich, also A_0 und damit A nicht kompakt. —

Mit Z werde im folgenden stets die (diskrete) Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$ bezeichnet, wo $\mathfrak{R}_p^+$ bzw. $\mathfrak{R}_p^+$ die Additionsgruppe der p-adischen Zahlen bzw. der ganzen p-adischen Zahlen bedeutet. Wir notieren einige für das folgende wichtige Eigenschaften von Z:

A. *Sind zwei Untergruppen Z_1, Z_2 von Z isomorph, so sind sie identisch, d.h. sie bestehen aus den gleichen Elementen von Z.*

Denn Z_1 und Z_2 sind von gleicher Ordnung. Ist diese ∞, so ist $Z_1 = Z_2 = Z$. Ist sie endlich, etwa p^n, so folgt $Z_1 = Z_2$ aus der Tatsache, daß Z zu jeder Ordnung p^n nur *eine* Untergruppe dieser Ordnung enthält.

B. *Ist Z' eine Untergruppe von Z, φ ein Endomorphismus von Z' auf eine Untergruppe $Z'' \subseteqq Z'$, so gibt es eine (nicht notwendig eindeutig bestimmte) ganz p-adische Zahl $\varrho \in \mathfrak{R}_p$, so daß $\varrho \cdot Z' = \varphi(Z')$, wo $\varrho \cdot Z'$ natürlich als Abbildung von Z' aufzufassen ist. Ist φ ein Automorphismus, so ϱ eine Einheit in $\mathfrak{R}_p$.*

Denn ist Z' und damit Z'' eine echte Untergruppe von Z, also von endlicher Ordnung, $z' \in Z'$ ein erzeugendes Element von Z', $z'' = \varphi(z')$ also ein erzeugendes

[3]) Derselbe Beweis wie bei KRULL, W.: Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184**, 35 (1942) unten: A sei linear kompakt. Enthält A/A_α ein Element $\neq 0$ von unendlicher Höhe, so können wir zunächst o.B.d.A. voraussetzen, daß A/A_α einrangig vom Typus $\mathfrak{R}_p^+ \mathfrak{R}_p^+$ ist und also ein Erzeugendensystem $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots$ mit den Relationen $p \cdot \bar{a}'_{i+} = \bar{a}'_i$ besitzt. Sei a'_i ein A-Element aus $\bar{a}'_i$, $a_i = p^{i-1} \cdot a'_i$, $B_i = (p^{i-1} \cdot A) \cap A_\alpha$, $\bar{a}_i$ die a_i enthaltende Nebenschar mod B_i. $p^{i-1} \cdot A$ und damit B_i ist — wie leicht zu sehen — eine abgeschlossene Untergruppe von A und die Nebenscharen $\bar{a}_i$ bilden eine Filterbasis, wie sofort aus $a_i - a_{i+1} = p^{i-1} \cdot a'_i - p^i a'_{i+1} = p^{i-1} \cdot (a'_i - p\, a'_{i+1}) \in (p^{i-1} \cdot A) \cap A_\alpha$ folgt. Wegen der linearen Kompaktheit gibt es dann mindestens ein $a \in A$, welches in allen $\bar{a}_i$ liegt und aus $a_i = p^{i-1} a'_i \quad a (p^{i-1} \cdot A)$ folgt, daß $a \neq 0$ von unendlicher Höhe in A ist.

[4]) Folgt sofort durch Übertragung der für gewöhnliche Abelsche Gruppen zu dem gleichen Resultat führenden Betrachtungen auf den Fall p-adischer Operatorgruppen. Vgl. SZELE, T.: Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. J. f. Math. **188**, 184 (1950).

Element von Z'', dann gibt es sicher ein $\varrho \in \mathfrak{R}_p$ mit $z'' = \varrho \cdot z'$ und es muß $\varphi(Z') = \varrho \cdot Z'$ sein. Ist aber Z' von unendlicher Ordnung, so ist $Z' = Z$ und damit auch $Z'' = Z$ und φ ist ein Endomorphismus von Z auf sich. $Z' = Z$ besitzt ein abzählbares Erzeugendensystem $z_1', z_2', \ldots$ mit den Relationen $p \cdot z_{i+1}' = z_i'$ wo z_i' von der Ordnung p^i ist. Ist $z_i'' = \varphi(z_i')$, dann gibt es ein $\varrho_i \in \mathfrak{R}_p$ mit $\varrho_i \cdot z_i' = z_i''$ und es gilt $p \cdot \varrho_{i+1} \cdot z_{i+1}' = p \cdot \varphi(z_{i+1}') = \varphi(z_i') = \varrho_i \cdot z_i'$, also $\varrho_{i+1} \equiv \varrho_i (p^i)$, d.h. die Folge der ϱ_i konvergiert gegen einen p-adischen Limes ϱ und es ist $\varrho \equiv \varrho_i (p^i)$, $z_i'' = \varrho_i \cdot z_i' = \varrho \cdot z_i'$, $Z'' = \varphi(Z') = \varrho \cdot Z'$. Der letzte Teil der Behauptung ist fast trivial.

Aus B. folgt nun sofort:

C. *Jeder Endomorphismus φ einer Untergruppe $Z' \subseteq Z$ läßt sich zu einem Endomorphismus von Z fortsetzen.*

Denn ist $\varphi'(Z') = \varrho \cdot Z'$, so hat die durch $\varphi(Z) = \varrho \cdot Z$ definierte Abbildung φ offenbar die gewünschte Eigenschaft.

2. Unter einem „*Charakter*" c der Gruppe A verstehen wir einen topologischen (d.h. stetigen und offenen) Homomorphismus von A in Z.

Jeder Charakter c von A besitzt als „*Kern*" eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha = A^{(c)}$ mit einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$ und umgekehrt gehören zu jeder derartigen Untergruppe von A gewisse Charaktere mit dieser Untergruppe als Kern. —

Zwischen den Charakteren von A wird in üblicher Weise eine Addition und eine Operatormultiplikation definiert[5]) und es ist klar, daß die Menge aller Charaktere von A damit zu einer gewöhnlichen Operatorgruppe $\overset{\circ}{C}[A]$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ wird. Wir betrachten $\overset{\circ}{C}[A]$ zunächst ohne Rücksicht auf die üblicherweise in der „Charakterengruppe" definierte Topologie und deuten dies durch das Symbol $^\circ$ über dem C an.

Wir stellen einige später benötigte Sätze über $\overset{\circ}{C}[A]$ zusammen:

a) *Zu jedem Element $a \neq 0$ aus A gibt es einen Charakter $c \in \overset{\circ}{C}[A]$ mit $c(a) \neq 0$.*

Denn es gibt eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ mit $a \notin A_\alpha$. Also gibt es nach bekannten Schlüssen auch eine große[6]) charakteristische Untergruppe $A_{\alpha'} \supseteq A_\alpha$ mit $a \notin A_{\alpha'}$. Wegen der einrangig direkten Zerlegbarkeit von A/A_α gibt es dann aber sogar eine große charakteristische Untergruppe $A^{(c)} \supseteq A_{\alpha'}$, mit $a \notin A^{(c)}$ und einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$. Jeder zu $A^{(c)}$ gehörige Charakter c besitzt dann die gewünschte Eigenschaft.

b) *Ist B eine Untergruppe von A, c_B ein Charakter von B, so gibt es einen c_B induzierenden Charakter $c \in \overset{\circ}{C}[A]$. Umgekehrt induziert jeder Charakter c von A einen Charakter c_B von $B \subseteq A$.*

$B_\alpha = B^{(c_B)}$ sei die zu c_B gehörende charakteristische Untergruppe von B. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ mit $A_\alpha \cap B = B_\alpha$.

[5]) $(c_1 + c_2)(a) = c_1(a) + c_2(a)$; $(\varrho \cdot c)(a) = \varrho \cdot c(a) = c(\varrho \cdot a)$ $(c_1, c_2, c \in \overset{\circ}{C}[A]$; $a \in A$; $\varrho \in \mathfrak{R}_p)$.

[6]) Eine „große" Untergruppe B der Gruppe A ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß A/B eine endlichrangige Torsionsgruppe ist — vgl. S. Nr. 8.

Die diskrete Gruppe A/A_α enthält eine die Restklassen von $(B+A_\alpha)/A_\alpha$ enthaltende einrangige Gruppe und man sieht wieder leicht die Existenz einer charakteristischen Untergruppe $A^{(c)} \supseteq A_\alpha$ mit einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$ und $A^{(c)} \cap B = B_\alpha$ [7]). Ist c' ein Charakter mit dem Kern $A^{(c)}$, so bildet c' die Gruppe $B \subseteq A$ auf dieselbe Untergruppe $Z' \subseteq Z$ ab wie c_B, d.h. der von c' in B induzierte Charakter c'_B und c_B unterscheiden sich um einen Automorphismus φ' von Z': $c_B(B) = \varphi'(c'_B(B))$. Ist φ ein gemäß Nr. 1 C. φ' induzierender Automorphismus von Z und setzen wir $c(A) = \varphi(c'(A))$, so ist c ein Charakter von A mit $c(B) = c_B(B)$. Die Umkehrung ist klar.

c) *Ist B eine Untergruppe von A, $\bar{A} = A/B$ und $\bar{c}$ ein Charakter von $\bar{A}$, so gibt es einen $\bar{c}$ induzierenden Charakter c von A mit $c(B) = 0$. Umgekehrt induziert jeder Charakter c von A mit $c(B) = 0$ einen Charakter $\bar{c}$ von $\bar{A}$.*

Den $\bar{c}$ induzierenden Charakter c von A erhält man einfach durch Zusammensetzen der Abbildung $\bar{c}$ mit dem natürlichen Homomorphismus von A auf $\bar{A}$. — Die Umkehrung ist ebenso einfach.

d) *Sei B eine Untergruppe von A, $\mathring{C}_B[A]$ die Menge aller Charaktere c aus $\mathring{C}[A]$ mit $c(B) = 0$. Dann ist $\mathring{C}[B]$ (Operator-) isomorph zu $\mathring{C}[A]/\mathring{C}_B[A]$ und $\mathring{C}_B[A]$ ist (Operator-) isomorph zu $\mathring{C}[A/B]$.*

Denn jeder Charakter $c \in \mathring{C}[A]$ induziert einen Charakter $c_B \in \mathring{C}[B]$ und nach b) erhält man so auch alle Charaktere c_B. Zwei Charaktere c und c' aus $\mathring{C}[A]$ induzieren genau dann den gleichen Charakter c_B von B, wenn sie kongruent mod $\mathring{C}_B[A]$ sind. Die Isomorphie von $\mathring{C}[B]$ und $\mathring{C}[A]/\mathring{C}_B[A]$ ist jetzt trivial. — Jeder Charakter $c \in \mathring{C}_B[A]$ induziert einen Charakter $\bar{c} \in C[A/B]$ und umgekehrt. Zu verschiedenen Charakteren $\bar{c}$ gehören verschiedene Charaktere c. Seien umgekehrt c, c' verschiedene A-Charaktere mit $c(B) = c'(B) = 0$. Dann sind ersichtlich auch die zugeordneten Charaktere $\bar{c}$, $\bar{c}'$ verschieden und die Zuordnung der Charaktere $c \in \mathring{C}_B[A]$ zu den von ihnen induzierten Charakteren $\bar{c} \in \mathring{C}[A/B]$ ist ein Isomorphismus. — Wir werden die Gruppe $\mathring{C}_B[A]$ aller die Untergruppe B von A „annullierenden" Charaktere in Zukunft als den „*Annullator*" von B (in $\mathring{C}[A]$) bezeichnen.

e) *Sei $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$, $c'_1, \ldots, c'_n$ seien endlich viele Elemente aus $\mathring{C}'$, $A^{(c'_i)}$ die zu c'_i als Kern gehörige charakteristische Untergruppe von A. Ist dann c'' ein weiterer Charakter von A mit dem Kern $A^{(c'')}$ und ist $\bigcap A^{(c'_i)} \subseteq A^{(c'')}$, so folgt $c'' \in \mathring{C}'$.*

[7]) Es ist die Existenz einer Untergruppe $\bar{A}^{(c)}$ der diskreten Gruppe $\bar{A} = A/A_\alpha$ mit einrangiger Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}^{(c)}$ und $\bar{A}^{(c)} \cap \bar{B} = \bar{0}$, wo $\bar{B} = (B + A_\alpha)/A_\alpha$ nachzuweisen. Da $\bar{B}$ eine einrangige Torsionsgruppe ist, enthält $\bar{B}$ genau eine (zyklische) Untergruppe $\bar{B}_0$ der Ordnung p. Ist $\bar{a}_0$ irgendein erzeugendes Element von $\bar{B}_0$, dann gibt es sicher eine Untergruppe $\bar{A}^{(c)} \subseteq \bar{A}$ mit einrangiger Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}^{(c)}$ und $\bar{a}_0 \notin \bar{A}^{(c)}$. Dann ist $\bar{B}_0 \cap \bar{A}^{(c)} = \bar{0}$ und erst recht $\bar{B} \cap \bar{A}^{(c)} = \bar{0}$.

Sei nämlich $\bar{A} = A/\bigcap A^{(c_i')}$. Den Charakteren $c_1', \ldots, c_n', c''$ von A entsprechen dann eineindeutig gewisse Charaktere $\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n', \bar{c}''$ von $\bar{A}$ [siehe c) und d)]. Ist $(\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n')$ die von den $\bar{c}_i'$ erzeugte Untergruppe von $\mathring{C}[\bar{A}]$, dann ist die von $(\bar{c}_1', \ldots, c_n')$ annullierte Untergruppe von $\bar{A}$ die Nullgruppe und da $\bar{A}$ diskret ist, folgt aus der Dualitätstheorie der diskreten Gruppen, daß $(\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n')$ die volle Charakterengruppe von $\bar{A}$ ist. Mithin ist $\bar{c}'' \in (\bar{c}_1', \ldots, c_n')$ und hieraus folgt sofort $c'' \in (c_1', \ldots, c_n') \subseteqq \mathring{C}'$.

Aus e) ergibt sich sofort eine wichtige Folgerung:

f) *Ist $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$ und durchläuft $A^{(c')}$ alle zu den $c' \in \mathring{C}'$ gehörigen charakteristischen Untergruppen von A, ist schließlich $\mathfrak{F}'$ der von den $A^{(c')}$ erzeugte Filter, so ist eine Gruppe $A_{\alpha'}$ aus $\mathfrak{F}'$ dann und nur dann ein $A^{(c')}$, wenn $A/A_{\alpha'}$ einrangig ist und die $A^{(c')}$ bilden ein durch $\mathfrak{F}'$ bereits eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}'$. Ist $\mathring{C}''$ eine echte Untergruppe von $\mathring{C}'$, so ist der zu $\mathring{C}''$ gehörige Filter $\mathfrak{F}''$ ein echter Teilfilter von $\mathfrak{F}'$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{F}'$ bildet eine abgeschlossene Untergruppe A' von A, die genau aus den Elementen a' mit $c'(A') = 0$ für alle $c' \in \mathring{C}'$ besteht.*

Sei $A_{\alpha'} \in \mathfrak{F}'$. Soll $A_{\alpha'}$ ein $A^{(c')}$ sein, so muß natürlich $A/A_{\alpha'}$ einrangig sein. Sei umgekehrt $A/A_{\alpha'}$ einrangig ($A_{\alpha'} \in \mathfrak{F}'$). Dann gibt es einen Charakter c'' von A mit $A^{(c'')} = A_{\alpha'}$. Da $A^{(c'')} \in \mathfrak{F}'$, gibt es endlich viele $A^{(c')}$, etwa $A^{(c_1')}, \ldots, A^{(c_n')} (c_i' \in \mathring{C}')$ mit $\bigcap A^{(c_i')} \subseteqq A^{(c'')}$ und hieraus folgt nach e) $c'' \in \mathring{C}'$. Der Rest der Behauptung ergibt sich jetzt fast unmittelbar.

Aus der letzten Bemerkung unter f) folgt sofort:

Ist $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$ und $A^{(\mathring{C}')}$ die Menge aller $a' \in A$ mit $c'(a') = 0$ für alle $c' \in \mathring{C}'$, dann ist $A^{(\mathring{C}')}$ eine abgeschlossene Untergruppe von A. Wir bezeichnen $A^{(\mathring{C}')}$ als *„die von $\mathring{C}'$ annullierte Untergruppe von A"*.

g) *Ist $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe, so A höhenendlich. Besitzt A ein kompaktes Erzeugendensystem, so ist $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe.*

Sei nämlich $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe, $c \in \mathring{C}[A]$. Dann ist für geeignetes p^n: $p^n \cdot c = 0$, d.h. $(p^n \cdot c)(a) = p^n(c(a)) = 0$ für jedes $a \in A$, wo n nicht von a abhängt. Sei a von unendlicher Höhe in A, a' Lösung der Gleichung $p^n \cdot x = a$ in A. Dann ist $c(a) = c(p^n \cdot a') = 0$ und wegen a) folgt hieraus $a = 0$. — Besitze nun A ein kompaktes Erzeugendensystem und $\mathring{C}[A]$ enthalte ein Element c von unendlicher Ordnung. Dann gibt es zu jedem p^n ein $a_n \in A$ mit $p^n \cdot c(a_n) = c(p^n \cdot a_n) \neq 0$. Hieraus folgt, daß die Bildgruppe $c(A)$ von A die ganze Gruppe Z sein muß und wenn $A^{(c)}$ die zu c gehörige charakteristische Untergruppe aus A ist, gilt $A/A^{(c)} = Z$ — im Widerspruch zu Satz 1 a).

3. Wir gehen nun von der gewöhnlichen p-adischen Operatorgruppe $\mathring{C}[A]$ zur *„Charakterengruppe"* $C[A]$ im üblichen Sinne über, indem wir $\mathring{C}[A]$ in der folgenden Weise durch Auszeichnung einer charakteristischen Basis $\mathfrak{B}$ (siehe S. Nr. 1) topologisieren:

Die Untergruppe $\mathring{C}_B \subseteq \mathring{C}[A]$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{B}$, wenn $\mathring{C}_B$ Annullator einer Untergruppe $B \subseteq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem ist[8]).

Fast unmittelbar aus der Definition von $C[A]$ folgt jetzt:

Ist B eine Untergruppe von A, $C_B \subseteq C[A]$ der Annullator von B, dann ist C_B eine abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$.

Denn $c \in C[A]$ gehört dann und nur dann zu C_B, wenn c alle zyklischen Hüllen (b) $(b \in B)$ aus B annulliert, d.h. C_B ist Durchschnitt aller $C_\beta \subseteq C[A]$ wo C_β der Annullator von (b) $(b \in B)$ ist. Aber (b) ist offenbar kompakt, C_β also eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$ und also $C_B = \bigcap C_\beta$ abgeschlossen.

Satz 2. Ist A eine primäre (zur Primzahl p gehörige) Gruppe, so auch $C[A]$. Ist A K-topologisch bzw. S-topologisch, so $C[A]$ S-topologisch bzw. K-topologisch.

Beweis. C_α sei eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, so daß es eine Untergruppe B mit kompaktem Erzeugendensystem gibt, deren Annullator $C_\alpha = C_B$ ist. Nach Satz 1 b) ist B höhenendlich. Nach Nr. 2 d) ist die (diskrete) Gruppe C/C_B $(C = C[A])$ gruppentheoretisch isomorph zu der Charakterengruppe $C[B]$, also nach Nr. 2 g) eine Torsionsgruppe. $C[A]$ ist also eine torsionstopologische Gruppe. Da sie auch eine p-adische Operatorgruppe ist und alle betrachteten Untergruppen und Restklassengruppen desgleichen, muß C/C_B eine primäre Torsionsgruppe sein und S. Satz 13 liefert den ersten Teil der Behauptung. — Sei nun A K-topologisch, $C^{(B)} \subseteq C[A]$ irgendeine operatorzulässige Untergruppe von $C[A]$ mit der Eigenschaft, daß $C/C^{(B)}$ eine Torsionsgruppe ist (Abgeschlossenheit von $C^{(B)}$ wird nicht vorausgesetzt). B sei die in A [nach der im Anschluß an Nr. 2 f) gemachten Bemerkung sicher abgeschlossene] durch $C^{(B)}$ annulierte Untergruppe von A, C_B der Annullator von B. Dann ist $C^{(B)} \subseteq C_B$ und C_B, wie oben festgestellt, abgeschlossen in $C[A]$. Ist $\mathfrak{S}^{(B)}$ bzw. $\mathfrak{S}_B$ der gemäß Nr. 2 f) zu $C^{(B)}$ bzw. C_B gehörige Filter in A, dann ist B sowohl der Durchschnitt von $\mathfrak{S}^{(B)}$ als auch der von $\mathfrak{S}_B$. Wäre aber C_B eine echte Obergruppe von $C^{(B)}$, dann wäre $\mathfrak{S}^{(B)}$ nach Nr. 2 f) ein echter Teilfilter von $\mathfrak{S}_B$ und da die Topologie von A nach S. Satz 15 eine totalgröbste ist, müßten $\mathfrak{S}^{(B)}$ und $\mathfrak{S}_B$ nach einer in S. Nr. 9 gemachten Bemerkung verschiedene Durchschnitte haben, was nicht sein kann. Also ist $C^{(B)} = C_B$ der Annullator von B. Aus Nr. 2 d) folgt dann die gruppentheoretische Isomorphie von $C[B]$ und C/C_B, d.h. $C[B]$ ist eine Torsionsgruppe, also nach Nr. 2 g) B höhenendlich und da B abgeschlossen in A, nach Satz 1 c) kom-

[8]) Es wird nicht verlangt und braucht auch nicht der Fall zu sein, daß die Annullatoren C_B der Untergruppen $B \subset A$ mit kompaktem Erzeugendensystem einen Filter bilden, denn mit C_B braucht keineswegs jede abgeschlossene Obergruppe von C_B Annullator einer Untergruppe von A zu sein. Wohl aber bilden die C_B eine Filterbasis. Sind nämlich $C_{B_1}, \ldots, C_{B_n}$ endlich viele Annullatoren der Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem $B_1, \ldots, B_n$, dann ist $C_B = \bigcap C_{B_i}$ Annullator der (topologischen) Vereinigungsgruppe $B = B_1 + \cdots + B_n$ [beachte die Bemerkung im Anschluß an Nr. 2 e)] und B besitzt ersichtlich gleichfalls ein kompaktes Erzeugendensystem. Da $\bigcap C_B$ alle zyklischen Hüllen in A und damit die ganze Gruppe A annulliert, folgt auch $\bigcap C_B = 0$.

pakt. C_B ist als Annullator der kompakten Gruppe $B \subseteq A$ also charakteristische Untergruppe von $C[A]$, d.h. jede Untergruppe C_B von $C[A]$, deren Restklassengruppe C/C_B eine Torsionsgruppe ist, ist charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Aus S. Satz 8 folgt jetzt, daß $C[A]$ S-topologisch ist. — Sei nun schließlich A S-topologisch. Das System der die charakteristischen Untergruppen von $C[A]$ definierenden Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem von A ist identisch mit dem System der endlichrangigen höhenendlichen Untergruppen von A[2]) und dieses hat offenbar die Eigenschaft, daß es mit je endlich vielen Untergruppen auch ihre (gewöhnliche) Vereinigungsgruppe so wie zu jeder Untergruppe auch deren Untergruppen enthält. Ist ferner φ eine Abbildung von A in Z, die in jeder endlichrangigen Untergruppe $B \subseteq A$ einen topologischen Homomorphismus φ_B von B in Z induziert, so ist φ ein topologischer Homomorphismus von A in Z. Die abstrakte (Operator-) Homomorphieeigenschaft von φ folgt daraus, daß sich zu je zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$ eine a_1, a_2 enthaltende endlichrangige höhenendliche Untergruppe — nämlich $(a_1)+(a_2)$ — angeben läßt, während die Offenheit des Homomorphismus φ sofort aus S. Satz 8 folgt. — Da die Gruppe Z diskret ist, ergibt sich aus dem oben Bemerkten leicht nach einem allgemeinen Satz von W. Krull[9]) die Vollständigkeit von $C[A]$. Sei nun C_B eine Umgebungsuntergruppe von $C[A]$, welche Annullator der kompakten Untergruppe B von A ist. Dann ist nach Nr. 2 d) $C[A]/C_B$ gruppentheoretisch isomorph zu $C[B]$ d.h. $C[A]/C_B$ ist eine endlichrangige Torsionsgruppe, C_B eine große Untergruppe von $C[A]$. Da $C[A]$ vollständig ist, folgt hieraus nach S. Satz 15 die Behauptung.

4. In der vorigen Nummer wurden die eine charakteristische Basis von $C[A]$ bildenden Untergruppen $C_B \subseteq C[A]$ definiert als Annullatoren der (in A abgeschlossenen) Untergruppen B mit kompaktem Erzeugendensystem. Dabei ist zu beachten, daß das System $\mathfrak{B}$ der C_B nicht notwendig einen Filter bildet[8]), d.h. mit C_B braucht nicht auch jede Obergruppe von C_B Annullator einer Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem von A zu sein. Wir behaupten nun

[9]) Krull, W.: Bewertungstopologie, Bonn 1952, als Manuskript veröffentlicht, Satz 2. Das dort nur für einen Sonderfall benutzte, aber sehr allgemein verwendbare Beweisverfahren verläuft in unserem Falle so: Sei A eine den zu Beginn von Nr. 1 gemachten Voraussetzungen genügende Gruppe, $C[A]$ die Charakterengruppe von A. Ferner gelte: Ist φ eine Abbildung von A in Z derart, daß für jede abgeschlossene Untergruppe B von A mit kompaktem Erzeugendensystem die von φ in B induzierte Abbildung ein topologischer Homomorphismus ist, dann sei φ ein topologischer Homomorphismus von A. Schließlich sei $\mathfrak{B}$ eine aus Nebenscharen nach den Annullatoren der Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem von A bestehende Cauchy-Filterbasis in $C[A]$. Die Schar $U_\alpha \in \mathfrak{B}$ sei Nebenschar des Annullators der Untergruppe $B_\alpha \subseteq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem. U_α besteht genau aus einer Menge von Charakteren von A, die in B_α einen und denselben Charakter c_α induzieren. Sei nun $a \in A$, $\mathfrak{B}_a = \{U_{c_a}\}$ die Menge aller U_α mit $a \in B_\alpha = B_{c_a}$. Dann ist $c_{c_a}(a) = z_a \in Z$ für alle α_a konstant und wir setzen $c^*(a) = c_{\alpha_a}(a) = z_a \in Z$. Läßt man a alle Elemente von A durchlaufen, dann fällt die in B_α von c^* induzierte Abbildung mit c_α zusammen und nach unseren Voraussetzungen ist c^* ein Charakter von A mit $c^* \in \bigcap U_\alpha$.

Satz 3. Die Annullatoren C_B der Untergruppen $B \subseteqq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem bilden dann und nur dann den ganzen charakteristischen Filter von $C[A]$, wenn A der folgenden Bedingung genügt:

(K_1) *Alle abgeschlossenen Untergruppen von A mit kompaktem Erzeugendensystem sind kompakt*[10]).

Beweis. „Dann": Sei C_α irgendeine charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $C_B \subseteqq C_\alpha$ von $C[A]$, welche Annullator einer kompakten Untergruppe B von A ist. Nach Nr. 2 d) lassen sich dann die Elemente der Restklassengruppe $C[A]/C_B$ mit den Elementen der Charakterengruppe $C[B]$ identifizieren und da sowohl $C[A]/C_B$ als auch $C[B]$ (als Charakterengruppe einer kompakten Gruppe) diskret sind, können wir $C[A]/C_B = C[B]$ setzen. Nun ist bekanntlich jede Untergruppe von $C[B] = C[A]/C_B$ Annullator einer (abgeschlossenen und daher kompakten) Untergruppe von B. Gehen wir aber von den Untergruppen $\bar{C}_\alpha$ von $C[A]/C_B$ in üblicher Weise zu ihren vollständigen Urbildern in $C[A]$, also den Obergruppen C_α von C_B zurück, so sieht man sofort, daß C_α (in $C[A]$) Annullator der gleichen Untergruppe von B ist, die die C_α entsprechende Bildgruppe $\bar{C}_\alpha \subseteqq C[A]/C_B = C[B]$ als Annullator (in $C[B]$) besitzt. Mit C_B ist also auch $C_\alpha \supseteqq C_B$ Annullator einer kompakten Untergruppe von A und hieraus folgt die behauptete Filtereigenschaft. — „Nur dann": Sei B eine abgeschlossene, nicht kompakte Untergruppe von A mit kompaktem Erzeugendensystem, C_B der Annullator von B in $C[A]$. Dann ist C_B eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, also $C[A]/C_B$ diskret. Da auch die Charakterengruppe $C[B]$ von B diskret sein muß, können wir, wie oben, auf Grund von Nr. 2 d) $C[A]/C_B$ und $C[B]$ in der üblichen Weise identifizieren. Beachten wir noch, daß die Obergruppen der charakteristischen Untergruppe C_B von $C[A]$ und die Untergruppen von $C[B] = C[A]/C_B$ sich genau entsprechen und daß eine Obergruppe von C_B nur dann Annullator einer Untergruppe von B ist, wenn das gleiche für die entsprechende Gruppe aus $C[B] = C[A]/C_B$ gilt, so ist nur noch zu beweisen, daß die Untergruppen von $C[B]$, die Annullatoren von Untergruppen aus B sind, keinen Filter bilden. Sei nun $\hat{B}$ die vollständige Hülle von B. Nach Satz 1 a) ist $\hat{B}$ kompakt. Jeder Charakter $\hat{c}$ von $\hat{B}$ induziert einen Charakter c von B und da B dicht in $\hat{B}$ liegt, läßt sich jede stetige Abbildung von B in Z bzw. jeder Charakter von B eindeutig zu einer stetigen Abbildung von $\hat{B}$ in Z bzw. zu einem Charakter von $\hat{B}$ fortsetzen[11]). Hieraus folgt, daß die (diskrete) Charakterengruppe $C[B]$ mit der (gleichfalls diskreten!) Charakterengruppe $C[\hat{B}]$ identifiziert werden kann. Nun gibt es sicher ein $\hat{b} \in \hat{B}$, welches nicht in B liegt und die von $\hat{b}$ erzeugte zyklische Hülle $(\hat{b})$ ist keine Untergruppe von B. $C_{(\hat{b})} \subseteqq C[\hat{B}] =$

[10]) Nach Satz 1 a) ist (K_1) z.B. für alle vollständigen und nach [2]) auch für alle S-topologischen Gruppen erfüllt.

[11]) Siehe BOURBAKI: Topologie générale, Kap. III, § 3, Prop. 6 und die daran anschließende Bemerkung.

$C[B]$ sei der Annullator von $(\dot{b})$. Aus für die Charakterentheorie kompakter Gruppen gültigen bekannten Sätzen folgt, daß $(\dot{b})$ genau die von $C_{(\dot{b})}$ annullierte Untergruppe ist. Soll nun $C_{(\dot{b})} \subseteqq C[B]$ Annullator einer Untergruppe von B sein, so muß diese eine echte Untergruppe von $(\dot{b})$, also eine zyklische Hülle $(b) \subseteqq B$ sein. (b) aber ist eine kompakte Untergruppe von $\dot{B}$ und der Annullator von $(b) \neq (\dot{b})$ aus $C[\dot{B}] = C[B]$ muß — wie wieder aus der Charakterentheorie der kompakten Gruppen folgt — von dem Annullator $C_{(\dot{b})}$ von $(\dot{b})$ verschieden sein — Widerspruch. Mithin ist die charakteristische Untergruppe $C_{(\dot{b})}$ von $C[B]$ nicht Annullator einer Untergruppe von B, woraus die Behauptung folgt.

Satz 4. a) A sei eine primäre zyklovollständige Gruppe, B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\mathring{C}[A]$ die (nicht topologisierte) Operatorgruppe, die von den Charakteren von A gebildet wird, $\mathring{C}_B \subseteqq \mathring{C}[A]$ der Annullator von B, B' die von $\mathring{C}_B$ annullierte Untergruppe von A. Dann ist $B = B'$.

b) Die primäre Gruppe A genüge der Voraussetzung (K_1) aus Satz 3. Sei $C^{(B)} \subseteqq C[A]$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe von $C[A]$, $B \subseteqq A$ die von $C^{(B)}$ annullierte Untergruppe von A, $C_B \subseteqq C[A]$ der Annullator von B. Dann ist C_B die (in $C[A]$) abgeschlossene Hülle von $C^{(B)}$.

Beweis. a) Jedenfalls ist $B' \supseteqq B$. Nach Nr. 2 c) und d) können wir $\mathring{C}_B$ mit der Gruppe $\mathring{C}[A/B]$ der Charaktere von A/B identifizieren. Wäre nun $a \in B'$, $a \notin B$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ das entsprechende Element von $\bar{A} = A/B$, so würde a und damit $\bar{a}$ von allen zu $\mathring{C}_B = \mathring{C}[A/B]$ gehörenden Charakteren in die 0 abgebildet — im Widerspruch zu Nr. 2 a). b) Zunächst ist sicher $C_B \supseteqq C^{(B)}$. Sei nun $C_{B'}$ eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$ mit $C_{B'} \supseteqq C^{(B)}$. Dann gibt es eine Untergruppe $B' \subseteqq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem, deren Annullator $C_{B'}$ ist und wegen $C^{(B)} \subseteqq C_{B'}$ wird B' auch von $C^{(B)}$ annulliert. Hieraus folgt $B' \subseteqq B$ und B' wird auch von C_B annulliert, woraus $C_B \subseteqq C_{B'}$ folgt. Jede $C^{(B)}$ enthaltende charakteristische Untergruppe von $C[A]$ enthält also auch C_B und hieraus folgt die Behauptung nach S. Nr. 2 a).

Korollar. Genügt die primäre Gruppe A der Bedingung (K_1) von Satz 3, dann ist die zwischen den (abgeschlossenen) Untergruppen von A und ihren Annullatoren aus $C[A]$ bestehende Korrespondenz umkehrbar eindeutig.

Sei nun B eine Untergruppe von A, $\bar{A} = A/B$, $C_B \subseteqq C[A]$ der Annullator von B, $\bar{C}$ die Charakterengruppe von $\bar{A}$. Nach Nr. 2 c) induziert jeder Charakter $c \in C_B$ einen Charakter $\bar{c} \in \bar{C}$ und nach Nr. 2 d) ist die so definierte Abbildung φ von C_B auf $\bar{C}$ ein gruppentheoretischer Isomorphismus. Wir behaupten:

φ ist offen, d.h. führt charakteristische Untergruppen von C_B in charakteristische Untergruppen von $\bar{C}$ über.

(Gleichbedeutend damit ist offenbar die Stetigkeit der inversen Abbildung φ^{-1}.) Sei nämlich $C_{B'}$ eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, B' die

Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem, deren Annullator $C_{B'}$ ist[12]). $\bar{B}' \subseteq \bar{A}$ sei die B' auf Grund des natürlichen Homomorphismus Φ von A auf $\bar{A}$ entsprechende Gruppe. Das kompakte Erzeugendensystem von B' geht bei Φ in ein kompaktes Erzeugendensystem von $\bar{B}'$ über und der Annullator $\bar{C}_{\bar{B}'} \subseteq \bar{C}$ von $\bar{B}'$ in $\bar{C}$ ist eine charakteristische Untergruppe von $\bar{C}$. Sei nun $\bar{c}' \in \bar{C}_{\bar{B}'}$, $c' \in C_B$ der dem Charakter $\bar{c}'$ von $\bar{A}$ auf Grund von φ zugeordnete Charakter von C_B. Dann ist c' der den Charakter $\bar{c}'$ gemäß Nr. 2 c) induzierende Charakter aus C_B und es gilt $c'(B') = \bar{c}'(\Phi(B')) = \bar{c}'(\bar{B}') = 0$, also $c' \in C_{B'}$, d.h. die $\bar{C}_{\bar{B}'}$ auf Grund von φ entsprechende Untergruppe von C_B liegt in $C_{B'}$: $\varphi^{-1}(\bar{C}_{\bar{B}'}) \subseteq C_{B'} \cap C_B$, $\varphi(C_{B'} \cap C_B) \supseteq \bar{C}_{\bar{B}'}$. Da die Untergruppen der Form $C_{B'} \cap C_B$ gerade die charakteristischen Untergruppen von C_B sind, folgt hieraus die Behauptung. Aus der vorangegangenen Bemerkung folgt:

Ist B eine charakteristische Untergruppe von A, also $\bar{A} = A/B$ diskret und $\bar{C} = C[\bar{A}]$ kompakt, so ist der Annullator C_B von B kompakt.

5. Sei wieder A eine beliebige zyklovollständige primäre Gruppe, $a \in A$. Dann definiert a einen topologischen Homomorphismus von $C[A]$ in Z vermöge der Festsetzung $a(c) = c(a)$, wo c alle Elemente von $C[A]$ durchläuft. In der Tat: Daß $a(c)$ ein gewöhnlicher (Operator-)Homomorphismus ist, folgt sofort aus $a(c_1 + c_2) = (c_1 + c_2)(a) = c_1(a) + c_2(a) = a(c_1) + a(c_2)$ bzw. entsprechend für die Operatormultiplikation. Andererseits ist der Kern des Homomorphismus $a(c)$ offenbar gerade der Annullator $C_{(a)}$ der von a erzeugten zyklischen Hülle (a) und $C_{(a)}$ ist, da (a) kompakt, eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Mithin ist $a(c)$ sogar ein topologischer Homomorphismus.

Wir bezeichnen $a(c)$ als „den von $a \in A$ induzierten Charakter von $C[A]$" und beweisen:

Satz 5. *A sei eine mit ihrer Charakterengruppe $C[A]$ der Bedingung (K_1) aus Satz 3 genügende Gruppe, $A^* = C[C[A]]$ die Charakterengruppe von $C[A]$. Ordnen wir jedem $a \in A$ den durch a induzierten Charakter $a^* \in A^*$ von $C[A]$ zu, so ist die so definierte Abbildung φ von A in A^* ein offener Isomorphismus von A auf A^*. φ und φ^{-1} führen kompakte bzw. abgeschlossene Untergruppen von A und A^* in kompakte bzw. abgeschlossene Untergruppen von A^* und A über.*

Beweis. a) φ ist eine Abbildung von A *auf* A^*. Sei nämlich $a^* \in A^*$ irgendein Charakter von $C[A]$, $C^{(a^*)} = C_B \subseteq C[A]$ der Kern der Abbildung a^* von $C[A]$ in Z. Dann ist $C^{(a^*)}$ eine große charakteristische Untergruppe von $C[A]$ mit einrangiger Restklassengruppe $C[A]/C^{(a^*)}$ und es gibt nach Satz 3 eine kompakte Untergruppe $B \subseteq A$ deren Annullator $C^{(a^*)} = C_B$ ist. Aus Nr. 2 d) folgt in bekannter Weise, daß $B = (a')$ eine zyklische Hülle ist. Der von einem (beliebig gewählten) erzeugenden Element a' von $B = (a')$ induzierte Charakter $a'^* \in A^*$ von $C[A]$ hat denselben Kern $C^{(a'^*)} = C^{(a^*)}$ wie a^*, denn ein Charakter $c \in C[A]$ von A annulliert a'^* dann und nur dann, wenn

[12]) Wir setzen dabei voraus, daß $C_{B'}$ zu der die Topologie der Charakterengruppe definierenden charakteristischen Basis gehört und also Annullator einer Untergruppe von A ist.

er a^* annulliert. Die durch a^* bzw. a'^* gelieferten Abbildungen von $C[A]$ in Z sind also gleichwertig zu den durch a^* bzw. a'^* bestimmten Isomorphismen $\bar{a}^*$ und $\bar{a}'^*$ derselben Restklassengruppe $C[A]/C^{(a'^*)} = C[A]/C^{(a^*)}$ in Z und lassen sich durch einen Automorphismus ψ_0 der Bildgruppe $Z_0 \subseteq Z$ ineinander überführen: $\bar{a}^* = \psi_0 \cdot \bar{a}'^*$. Nach Nr. 1 B. gibt es also eine ganze p-adische Zahl ϱ (in diesem Falle ist ϱ sogar eine Einheit in $\mathfrak{R}_p$), so daß $\bar{a}^* = \varrho \cdot \bar{a}'^*$. Wir setzen $a = \varrho \cdot a' \in A$. Dann induziert a genau den gegebenen Charakter a^* von $C[A]$, denn es ist $a'^*(c) = c(a')$, also $a^*(c) = c(\varrho \cdot a') = c(a)$. — b) φ ist ein gruppentheoretischer Isomorphismus. Die (Operator-)Homomorphieeigenschaft von φ folgt aus einer trivialen Rechnung. Ist weiter $a \in A$, $a^* = \varphi(a) = 0$, so gilt für jedes $c \in C[A]$: $a^*(c) = 0$ also $c(a) = 0$ und aus Nr. 2 a) folgt $a = 0$. φ ist also sogar ein Isomorphismus. — c) Zum Nachweis der behaupteten topologischen Eigenschaften von φ bemerken wir: Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $C_B \in C[A]$ der Annullator von B, $B'^* \subseteq A^* = C[C[A]]$ der Annullator von C_B dann ist $B'^* = B^* = \varphi(B)$ genau die B auf Grund der Abbildung φ zugeordnete Gruppe aus A^*. — In der Tat: B'^* besteht genau aus allen $b'^* \in A^*$ mit $b'^*(C_B) = 0$ und die den b'^* vermöge φ^{-1} zugeordneten Elemente b' aus A genügen der Bedingung $c_B(b') = 0$ für alle $c_B \in C_B$, d.h. werden durch C_B annulliert. Wird umgekehrt das Element $b' \in A$ von C_B annulliert, also $c_B(b') = 0$ $(c_B \in C_B)$, so folgt für $b'^* = \varphi(b') \in A^*$: $b'^*(C_B) = 0$, also $b'^* \in B'^*$. $B' = \varphi^{-1}(B'^*)$ ist also genau die durch C_B annullierte Untergruppe von A und nach Satz 4 b) ist C_B der Annullator von B', also nach Satz 4 a) $B = B'$. Daraus folgt $\varphi(B) = B^* = B'^*$. — Ist nun $A_{\alpha'}$ eine charakteristische Untergruppe von A, dann ist der Annullator $C_{A_{\alpha'}} \subseteq C[A]$ von $A_{\alpha'}$ nach der Schlußbemerkung von Nr. 4 kompakt, der Annullator $A^*_{\alpha'} = \varphi(A_{\alpha'}) \subseteq A^*$ von $C_{A_{\alpha'}}$ also eine charakteristische Untergruppe. — Ist $B \subseteq A$ kompakt, also der Annullator $C_B \subseteq C[A]$ eine charakteristische Untergruppe, dann ist $B^* = \varphi(B) \subseteq A^*$ wieder nach der Schlußbemerkung von Nr. 4 kompakt. Ist umgekehrt die Untergruppe $B^* \subseteq A^*$ kompakt, dann auch $B = \varphi^{-1}(B^*) \subseteq A$ wegen der Stetigkeit von φ^{-1}. — Aus der Stetigkeit von φ^{-1} folgt auch, daß φ abgeschlossene Untergruppen in abgeschlossene Untergruppen überführt. Da jede abgeschlossene Untergruppe als Durchschnitt von charakteristischen Untergruppen darstellbar ist [S. Nr. 2 a)] und φ^{-1} natürlich Durchschnitte in Durchschnitte überführt, bleibt nur noch zu beweisen, daß jede *charakteristische* Untergruppe von A^* durch φ^{-1} in eine abgeschlossene Untergruppe von A überführt wird. Ist aber $A^*_{\alpha'}$ eine charakteristische Untergruppe von A^* dann ist $A^*_{\alpha'}$ Annullator einer kompakten Untergruppe $C^{(\alpha')}$ von $C[A]$ und in üblicher Weise erschließt man sofort, daß $A_{\alpha'} = \varphi^{-1}(A^*_{\alpha'})$ die von $C^{(\alpha')}$ annullierte Untergruppe von A, also sicher abgeschlossen ist. Damit ist Satz 5 in allen Teilen bewiesen.

Korollar. Ist die primäre Gruppe A K-topologisch oder S-topologisch, dann ist $A^* = C[C[A]]$ mit der Zuordnung φ von Satz 5 topologisch isomorph zu A, d.h. es gilt der Dualitätssatz[13]).

[13]) Der Inhalt von Satz 2 und des obigen Korollars wurde vom Verf. auf der Tagung der DMV 1952 in München vorgetragen. Während der Fertigstellung der vorliegenden

Denn A genügt unter den angegebenen Voraussetzungen sicher der Bedingung (K_1) von Satz 3. Ist A K-topologisch oder S-topologisch, dann wegen Satz 2 auch A^* und die Behauptung folgt wegen der Offenheit des Isomorphismus φ von A auf A^* aus der Gröbst- bzw. Feinsteigenschaft der K-Topologie bzw. der S-Topologie. Wir wollen das im Korollar zu Satz 5 sowie in den auf K-topologische und S-topologische Gruppen bezüglichen Aussagen von Satz 2 enthaltene Resultat noch in gewissem Umfange auf nichtprimäre Gruppen ausdehnen und verwenden hierzu einen (in unserem Spezialfall auch leicht unmittelbar zu verifizierenden) Satz von S. KAPLAN[14]): Seien A_α irgendwelche (Untergruppen-)topologischen Gruppen, welche dem Dualitätssatz genügen, $A'_\alpha = C[A_\alpha]$. Ferner sei $A = \sum^T \oplus A_\alpha$. $A' = \sum \oplus A'_\alpha$[15]). Dann ist A' topologisch isomorph zur Charakterengruppe von A und A und A' genügen dem Dualitätssatz.

Wir definieren nun:

Eine (nicht notwendig primäre) S-topologische Gruppe A heiße *„im engeren Sinne S-topologisch"*, wenn jede abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem von A endlichrangig, d.h. also Summe endlich vieler einrangiger (also primärer) Gruppen ist. Nach Satz 1 ist jede primäre S-topologische Gruppe auch im engeren Sinne S-topologisch und aus S. Satz 9 folgt dann leicht: Eine (nicht primäre) S-topologische Gruppe A ist genau dann im engeren Sinne S-topologisch, wenn $A = \sum \oplus A^{(p)}$ direkte Summe ihrer primären Komponenten $A^{(p)}$ ist. Beachtet man noch, daß nach ST. PIETRKOWSKI[16]) jede K-topologische Gruppe A direkte TYCHONOFF-Summe ihrer primären Komponenten ist, so folgt aus Satz 2, dem Korollar von Satz 5, sowie dem oben zitierten Satz von KAPLAN und den angeschlossenen Bemerkungen fast unmittelbar:

Satz 6. Ist A eine (nicht notwendig primäre) K-topologische bzw. im engeren Sinne S-topologische Gruppe, so ist $C[A]$ im engeren Sinne S-topologisch bzw. K-topologisch und A genügt in jedem Falle dem Dualitätssatz.

6. Zum Schluß wenden wir uns wieder den zyklovollständigen *primären* Gruppen zu und stellen die naheliegende Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen für die weder K-topologischen noch S-topologischen Gruppen der Dualitätssatz gilt oder schärfer, wann die Abbildung φ des Satzes 5 von A auf $A^* = C[C[A]]$ ein *topologischer* Isomorphismus ist. Da gleich gezeigt werden wird, daß in diesem Falle die Bedingung (K_1) des Satzes 3 für A und $C[A]$ erfüllt sein muß, können wir uns auf die Betrachtung der mit ihren

Arbeit erhielt ich Einblick in ein derzeit noch unveröffentlichtes Manuskript einer Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY, in welcher in anderem Zusammenhang und auf anderem Wege die erste Hälfte des obigen Korollars, d.h. also die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die primären, linear kompakten Gruppen nachgewiesen wird.

[14]) KAPLAN, S.: Extension of the Pontrjagin Duality. I. Duke Math. J. **15**, 649—658 (1948).

[15]) $\sum^T \oplus A_\alpha$ bedeutet die „direkte TYCHONOFF-Summe" der A_α, im Gegensatz zur gewöhnlichen direkten Summe $\sum \oplus A_\alpha$ — vgl. S. Nr. 1.

[16]) PIETRKOWSKI, ST.: Theorie der Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

Charakterengruppen der Bedingung (K_1) genügenden Gruppen beschränken. Für diese haben wir in Satz 5 eine bereits hart an das erstrebte Resultat heranreichende Aussage: Die gruppentheoretisch isomorphen Gruppen A und $A^* = C[C[A]]$ haben dieselben kompakten und abgeschlossenen Untergruppen und die Topologie von A^* ist höchstens feiner als die von A. Die naheliegende Vermutung, daß aus (K_1) schon die topologische Isomorphie von A und A^* folgt, kann ich weder beweisen noch widerlegen und beschränke mich darauf, eine zusätzliche Bedingung anzugeben, aus welcher die Gültigkeit des Dualitätssatzes folgt und mit deren Hilfe jedenfalls die Gültigkeit des Dualitätssatzes für eine weitere besonders wichtige Klasse von primären Gruppen nachgewiesen werden kann. Die fragliche Bedingung ist rein topologisch und soll daher ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum R formuliert werden:

(K_2): *Ist M eine Untermenge des topologischen Raumes R, q ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine Untermenge $M_1 \subset M$, deren (in R) abgeschlossene Hülle $\tilde{M}_1$ kompakt ist mit $q \in \tilde{M}_1$.*

Die Bedingung (K_2) ist offenbar eine gemeinsame Abschwächung der Lokalkompaktheit (erst recht also der Kompaktheit) sowie des ersten (erst recht also des zweiten) Abzählbarkeitsaxioms.

Wir zeigen zunächst:

Genügt A der Bedingung (K_2), dann ist $C[A]$ vollständig.

In der Tat. f sei eine eindeutige Abbildung von A in Z derart, daß für jede Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem $B \subseteq A$ die von f in B induzierte Abbildung f_B ein topologischer (Operator-)Homomorphismus ist. Dann ist f natürlich ein gruppentheoretischer (Operator-)Homomorphismus von A in Z. Sein Kern A_f ist eine große Untergruppe von A. Wir zeigen, daß A_f abgeschlossen in A ist: Sei $q \in A$ ein Häufungspunkt von A_f. Dann folgt aus (K_2) sofort die Existenz einer Untergruppe $A_f' \subset A_f$, derart daß die (in A) abgeschlossene Hülle $\tilde{A}_f'$ ein kompaktes Erzeugendensystem besitzt und $q \in \tilde{A}_f'$ ist. Da A_f' dicht in $\tilde{A}_f'$ liegt und $f(A_f') = 0$ ist, folgt $f(\tilde{A}') = 0$, also $f(q) = 0$, $q \in A_f$. — Die große Untergruppe $A_f \subset A$ ist also abgeschlossen und daher nach bekannten Schlüssen sogar offen, also f ein topologischer Homomorphismus. Nach einem Satz von W. KRULL[9]) folgt nun sofort die Vollständigkeit von $C[A]$.

Jetzt gilt

Satz 7. A sei eine primäre zyklovollständige Gruppe, φ wie in Satz 5 die Abbildung von A in $A^* = C[C[A]]$, welche jedem $a \in A$ den durch a induzierten Charakter $a^* \in A^*$ von $C[A]$ zuordnet. Dafür, daß φ ein topologischer Isomorphismus von A auf A^* sei, ist notwendig das Erfülltsein der Bedingung (K_1) für A sowie $C[A]$ und hinreichend die Gültigkeit der Bedingungen (K_1) und (K_2) für A.

Beweis. Ist φ ein topologischer Isomorphismus, C' eine abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$, $A^{*\prime} \subset A^*$ der Annullator von C', dann ist C' offenbar

[beachte Satz 4 a)] Annullator von $A' = \varphi^{-1}(A^{*'}) \subseteq A$. Ist ferner $A^{*'}$ irgendeine abgeschlossene Untergruppe von A^*, $A' = \varphi^{-1}(A^{*'})$, C' der Annullator von A', dann ist $A^{*'}$ der Annullator von C'. Mithin ist jede abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$ bzw. $A^* = C[C[A]]$ Annullator einer gewissen Untergruppe von A bzw. $C[A]$ und hieraus folgt nach Satz 3 fast unmittelbar die Gültigkeit von (K_1) für A und $C[A]$. — Sei nun (K_1) und (K_2) für A erfüllt. Wie oben bewiesen, ist dann $C[A]$ vollständig, genügt also (K_1) und die Voraussetzungen von Satz 5 sind erfüllt. Wir haben nur noch zu zeigen, daß φ stetig ist und bemerken zunächst, daß φ beliebige kompakte Mengen M aus A in kompakte Mengen aus A^* überführt. Denn ist $M \subseteq A$ kompakt, dann ist die von M erzeugte abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ wegen (K_1) auch kompakt, also nach Satz 5 auch $B^* = \varphi(B) \subseteq A^*$. Wegen der Offenheit von φ (Stetigkeit von φ^{-1}) ist aber $M^* = \varphi(M) \subseteq B^*$ abgeschlossen, also auch kompakt. — Ist nun $M \subseteq A$ beliebig, $q \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es wegen (K_2) eine Menge $M_1 \subseteq M$, so daß die abgeschlossene Hülle $\widetilde{M}_1$ kompakt ist und q enthält. $\varphi(\widetilde{M}_1)$ ist daher kompakt, $\widetilde{\varphi(M_1)} \subseteq \varphi(\widetilde{M}_1)$ gleichfalls und daher $\varphi(\widetilde{M}_1) = \widetilde{\varphi(M_1)}$. Aber $\varphi(\widetilde{M}_1)$ enthält $\varphi(q)$ und $\varphi(q)$ ist Häufungspunkt von $\varphi(M_1)$, also erst recht von $\varphi(M) \supseteq \varphi(M_1)$. Daraus folgt die Stetigkeit von φ und damit die Behauptung.

Korollar. Für jede vollständige, primäre, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügende Gruppe gilt der Dualitätssatz.

Zusatz bei der Korrektur. Die in [13]) erwähnte Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY ist mittlerweile im Druck erschienen: KAPLANSKY, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213—219 (1953).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. August 1953.)

Söhngen, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 31—51 (1954)

Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation.

Von
Heinz Söhngen.

1. Einleitung.

Ist $F(x)$ in dem Intervall $(-1, +1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$, so verstehen wir unter der endlichen Hilbert-Transformation die Integraltransformation

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = \frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi} d\xi, \qquad (-1 < x < 1), \tag{1}$$

wobei das Integral an der singulären Stelle $x = \xi$ im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu nehmen ist. $\mathfrak{H}\{F(x)\}$ existiert dann fast überall und gehört ebenfalls zur Klasse L^p [1]).

Da diese Transformation sowohl in der Aerodynamik, als auch in der Elastizitätstheorie sowie sonstigen Anwendungen des öfteren auftritt, so erscheint es zweckmäßig, nach einer weiteren Integraltransformation

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} K(x, s) F(x) \, dx \tag{2}$$

zu suchen, die die Anwendung der H-Transformation in eine Multiplikation übersetzt, ähnlich, wie die einseitige Laplace-Transformation die Operation der Differentiation in eine Multiplikation verwandelt. Die Transformation $\mathfrak{T}$ soll also so bestimmt werden, daß

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = g_1(s) \cdot \mathfrak{T}\{F(x)\} + C \cdot g_2(s) \tag{3}$$

ist, wobei $g_1(s)$ und $g_2(s)$ zwei von $F(x)$ unabhängige Funktionen sind, die Konstante C dagegen eventuell von $F(x)$ abhängt.

Nimmt man an, daß $K(x, s)$ als Funktion von x in $(-1, +1)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ mit $1/p + 1/q \leq 1$ angehört, so hat Tricomi [2]) gezeigt, daß

$$\int_{-1}^{1} K(x, s) \oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi} d\xi \, dx = \int_{-1}^{1} F(\xi) \oint_{-1}^{1} \frac{K(x, s)}{x - \xi} dx \, d\xi. \tag{4}$$

---

[1]) Titchmarsh, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 132. Oxford 1948.

[2]) Tricomi, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) 2, 199—211, 202 (1951).

Damit nimmt dann die Bedingung (3) die Form

$$(5) \qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,\frac{1}{\pi}\,\Phi\!\!\!\!\!\!-\int_{-1}^{1} \frac{K(\xi,s)}{\xi - x}\,d\xi\,dx = g_1(s)\int_{-1}^{1} K(x,s)\,F(x)\,dx + C\,g_2(s)$$

an. Diese Beziehung ist offenbar dann erfüllt, wenn $K(x, s)$ so bestimmt wird, daß

$$(6) \qquad \mathfrak{H}\{K(x,s)\} = -K(x,s)\,g_1(s) - g_2(s)$$

ist. Nun ist aber für reelles α mit $0<|\alpha|<1$ [3])

$$(7) \qquad \mathfrak{H}\left\{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right\} = -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\operatorname{ctg}\pi\alpha + \frac{1}{\sin\pi\alpha}$$

und mithin

$$K(x,s) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}$$

ein Kern mit der gesuchten Eigenschaft. Dementsprechend betrachten wir die Integraltransformation

$$(8) \qquad \mathfrak{T}\{F(x)\} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s} F(x)\,dx$$

und wollen für diese einige Aussagen beweisen. Dabei setzen wir noch zur Abkürzung

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \mathfrak{f}(s).$$

2. Eigenschaften von $\mathfrak{T}\{F(x)\}$.

Die durch (8) definierte Transformation hat die angenehme Eigenschaft, daß sie in einem engen Zusammenhang mit der zweiseitigen Laplace-Transformation steht. Setzt man nämlich

$$(9) \qquad x = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \quad \text{d.h.} \quad e^z = \frac{1+x}{1-x}$$

und schreibt [4])

$$F\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right) = f(z),$$

so wird

$$(10) \qquad \mathfrak{f}(s) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s} F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^z f(z)}{(1+e^z)^2}\,e^{-sz}\,dz = \mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\left\{\frac{2e^z f(z)}{(1+e^z)^2}\right\}$$

[3]) TRICOMI, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) **2**, 209 (1951).

[4]) Funktionen aus dem Intervall $-1 < x < 1$ kennzeichnen wir stets durch große lateinische Buchstaben, ihre Bilder bei der Substitution (9) durch den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben und die Transformierten gemäß (8) durch kleine gotische Buchstaben.

oder mit $s=\sigma+i\tau$

$$\mathfrak{f}(s)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(1-\sigma)z}f(z)}{(1+e^z)^2}\cdot\frac{e^{-i\tau z}-1}{-iz}\,dz. \tag{11}$$

Aus diesen Darstellungen ergeben sich nun nahezu unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften der Funktion $\mathfrak{f}(s)$, die in den folgenden Sätzen zusammengestellt sein mögen.

Satz 1. *Gehört die Funktion $F(x)$ in $(-1,+1)$ zur Klasse L^p $(p>1)$, so konvergiert die $\mathfrak{T}$-Transformierte von $F(x)$ in dem Streifen $|\Re s|<1-1/p$ absolut, d.h., es existiert dort*

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\Re s}|F(x)|\,dx$$

und $\mathfrak{f}(s)$ stellt eine im Inneren des Streifens regulär analytische Funktion dar, die im Unendlichen verschwindet. Weiter gilt in diesem Streifen die Darstellung (11) und es besteht für fast alle z die Umkehrformel

$$\frac{2f(z)\,e^{z(1-\sigma)}}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau. \tag{12}$$

Die erste Behauptung folgt mit $p'=p/(p-1)$ aus der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\Re s}|F(x)|\,dx\le\left[\int_{-1}^{1}|F(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p'\Re s}dx\right]^{1/p'}.$$

Mithin ist

$$h(z,\sigma)=\frac{2e^{(1-\sigma)z}f(z)}{(1+e^z)^2}$$

für $|\sigma|<1-1/p$ in $(-\infty<z<\infty)$ absolut integrabel und der Bereich $|\Re s|<1-1/p$ ist ein Streifen absoluter Konvergenz für $\mathfrak{f}(s)$. Beachtet man nun, daß $\mathfrak{f}(s)$ eine zweiseitige Laplace-Transformierte ist, so ergeben sich daraus die angeführten Regularitätseigenschaften[5]).

Auf der rechten Seite von (11) darf die Differentiation unter dem Integralzeichen vollzogen werden, denn die Ableitung des Integranden kann durch die Funktion $|h(z,\sigma)|$ der Klasse L abgeschätzt werden. Ein Vergleich mit (10) liefert dann die Behauptung.

Die Umkehrformel (12) schließlich folgt daraus, daß wegen (11) die Funktion $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ als Funktion von τ die Fourier-Transformierte der absolut integrablen Funktion $h(z,\sigma)$ ist[6]).

[5]) Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, S. 144ff. Basel 1950.

[6]) Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, S. 204. Basel 1950.

Satz 2. *Gehört die Funktion $F(x)$ in $(-1, +1)$ zur Klasse L^p mit $1<p\leqq 2$, so ist $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ für jedes feste σ mit $|\sigma|<1-1/p$ in $(-\infty<\tau<\infty)$ eine Funktion der Klasse $L^{p'}$ mit $p'=p/(p-1)$. Setzt man $\sigma_1=1-1/p$, so wird durch*

$$\mathfrak{f}_1(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f(z)}{(1+e^z)^2}\,\frac{-i\tau z-1}{-iz}\,dz \tag{13}$$

eine Funktion der Klasse $L^{p'}$ dargestellt, für die für fast alle z

$$\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f(z)}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_1(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau \tag{14}$$

und

$$\lim_{\sigma\to\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^{p'}\,d\tau=0 \tag{15}$$

ist. Die entsprechende Aussage gilt auch für $\sigma\to\sigma_{-1}=-1+1/p$, die zugehörige Funktion werde mit $\mathfrak{f}_{-1}(\sigma)$ bezeichnet.

Beweis. Die Funktion $h(z,\sigma)$ gehört für $|\sigma|\leqq 1-1/p$ als Funktion von z in $(-\infty,+\infty)$ zur Klasse L^p und daher werden durch (11) für $|\sigma|<1-1/p$ und durch (13) für $\sigma=1-1/p$ Funktionen von τ dargestellt, die zur Klasse $L^{p'}$ gehören[7]). Daraus folgt dann die Umkehrformel (14) für fast alle z. Weiter ist für $|\sigma|<1-1/p$

$$\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^zf(z)}{(1+e^z)^2}\,[e^{-\sigma z}-e^{-\sigma_1 z}]\,\frac{e^{-i\tau z}-1}{-iz}\,dz,$$

d.h., die der Klasse $L^{p'}$ angehörende Funktion $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)$ ist die Fourier-Transformierte der Funktion

$$\psi(z,\sigma)=h(z,\sigma)-h(z,\sigma_1)$$

aus L^p. Mithin gilt die Abschätzung[7])

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^{p'}\,d\tau\leqq 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(z,\sigma)|^p\,dz\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Beachtet man schließlich noch, daß

$$|\psi(z,\sigma)|^p\leqq 2^p\,\frac{|f(z)|^pe^z}{(1+e^z)^2},$$

wobei die rechte Seite zur Klasse L gehört, so darf in

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(z,\sigma)|^p\,dz$$

[7]) TITCHMARSH, E.C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 96. Oxford 1948.

der Grenzübergang $\sigma \to \sigma_1$ unter dem Integralzeichen vollzogen werden. Damit ist (15) bewiesen. Ganz entsprechend verläuft der Beweis, wenn $\sigma \to -1 + 1/p$ strebt.

Von dem vorhergehenden Satz gilt noch die folgende schwache Umkehrung.

Satz 3. *Ist $F(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L und ist längs der imaginären Achse*

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \mathfrak{f}(s),$$

wobei $\mathfrak{f}(s)$ in $|\Re s| < 1 - 1/p$ mit $1 < p \leq 2$ regulär ist und dort bei festem $|\sigma| < 1 - 1/p$ als Funktion von τ in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse L^2 gehört, so ist $F(x)$ Funktion jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$.

Sind die vorstehenden Voraussetzungen für $p = 2$ erfüllt und existieren überdies zwei Funktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ der Klasse L^2, für die

$$\lim_{\sigma \to \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{f}(\sigma + i\tau) - \mathfrak{f}_1(\tau)|^2 = 0$$

und

$$\lim_{\sigma \to -\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{f}(\sigma + i\tau) - \mathfrak{f}_{-1}(\tau)|^2 = 0,$$

so ist auch $F(x)$ eine Funktion der Klasse L^2.

Beweis. Da $F(x)$ zu L gehört, so ist $h(z, 0)$ in $(-\infty, +\infty)$ eine Funktion derselben Klasse. Ihre Fourier-Transformierte ist $\mathfrak{f}(i\tau)$, eine Funktion der Klasse L^2. Mithin gilt im Lebesgueschen Sinn

$$h(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(i\tau) \frac{e^{i\tau z} - 1}{i\tau} d\tau.$$

Darin ist der Integrand eine in $|\Re s| < 1 - 1/p$ reguläre und im Unendlichen verschwindende Funktion, so daß also auch für $|\sigma| < 1 - 1/p$

$$h(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \frac{e^{(\sigma + i\tau)z} - 1}{\sigma + i\tau} d\tau$$

ist. Beachtet man weiter, daß in der Identität

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \left[\frac{e^{(\sigma+i\tau)z} - 1}{\sigma + i\tau} - e^{\sigma z} \frac{e^{i\tau z} - 1}{i\tau} \right] d\tau$$

$$= \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \frac{\sigma e^{\sigma z}(1 - e^{i\tau z})}{(\sigma + i\tau) i\tau} d\tau + (e^{\sigma z} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}(\sigma + i\tau)}{\sigma + i\tau} d\tau \right\}$$

die Differentiation auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen durchgeführt werden darf, da die Ableitung des Integranden eine Abschätzung

durch eine Funktion der Klasse L zuläßt, so erhält man

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{(\sigma+i\tau)z}-1}{\sigma+i\tau}\,d\tau = e^{\sigma z}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau$$

und damit für $|\sigma|<1-1/p$

$$h(z,\sigma) = h(z,0)\,e^{-z\sigma} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau.$$

Nun gehört aber nach Voraussetzung $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ zur Klasse L^2. Dasselbe gilt dann auch für ihre Fourier-Transformierte $h(z,\sigma)$.

Ist nun p_1 eine reelle Zahl mit $1<p_1<p$, so ist

$$\frac{|f(z)|^{p_1}e^{z}}{(1+e^z)^2} = |h(z,\sigma)|^{p_1}\cdot(1+e^z)^{2(p_1-1)}\,e^{z[1-p_1(1-\sigma)]}\cdot 2^{-p_1}. \tag{16}$$

Darin ist der erste Faktor für jedes σ mit $|\sigma|<1-1/p$ eine Funktion der Klasse L^{2/p_1}. Wählt man σ noch so, daß

$$\text{für}\quad z\geqq 0,\qquad -1+1/p<\sigma<-1+1/p_1$$

und

$$\text{für}\quad z<0,\qquad 1-1/p_1<\sigma<1-1/p$$

ist, so gehört der zweite Faktor in (16) zu jeder Klasse L^q $(q>1)$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt dann, daß die linke Seite von (16) zu L gehört, d.h., $F(x)$ ist eine Funktion der Klasse L^{p_1}. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Um den zweiten Teil zu beweisen, gehen wir von der für fast alle z durch

$$\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f_1(z)}{(1+e^z)^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}_1(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau, \qquad (\sigma_1=\tfrac{1}{2}) \tag{17}$$

definierten Funktion[7]) aus. Die rechte Seite von (17) gehört dabei zu L^2 und aus

$$\frac{2e^{z}|f_1(z)|^2}{(1+e^z)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f_1(z)}{(1+e^z)^2}\right)^2(1+e^z)^2$$

folgt, daß die $f_1(z)$ entsprechende Funktion $F_1(x)$ in $(-1,0)$ eine Funktion der Klasse L^2 ist. Wir behaupten weiter, daß $f(z)$ und $f_1(z)$ fast überall übereinstimmen und betrachten dazu das Integral

$$J(z,\sigma) = \int_0^z \frac{2e^{z}}{(1+e^z)^2}\,[e^{-\sigma z}f(z) - e^{-\sigma_1 z}f_1(z)]\,dz. \tag{18}$$

Dafür kann

$$J(z,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{f}(\sigma+i\tau) - \mathfrak{f}_1(\tau)]\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau$$

geschrieben werden und die Schwarzsche Ungleichung liefert die Abschätzung

$$|J(z,\sigma)| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}},$$

aus der

$$\lim_{\sigma\to\frac{1}{2}} J(z,\sigma)=0$$

folgt. Nun darf aber in der Definitionsgleichung (18) für $J(z,\sigma)$ der Grenzübergang $\sigma\to\sigma_1$ unter dem Integralzeichen durchgeführt werden und es folgt

$$\int_0^z \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{(1+e^z)^2}\,[f(z)-f_1(z)]\,dz=0.$$

Die Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ stimmen also fast überall überein und mithin gehört auch $F(x)$ in $(-1,0)$ zur Klasse L^2. Die Betrachtung an der Stelle $\sigma=\sigma_{-1}=-1/2$ liefert ganz entsprechend die quadratische Integrabilität von $F(x)$ in $(0,1)$.

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen. Aus ihm und dem Satz 2 folgt, daß eine Funktion $F(x)$, die in $(-1,1)$ zur Klasse L gehört, dann und nur dann dort auch eine Funktion der Klasse L^2 ist, wenn ihre Transformierte $\mathfrak{f}(s)$ in dem Streifen $\Re|s|<1/2$ regulär ist, dort längs jeder Parallelen zur imaginären Achse zu L^2 gehört, und zwei derselben Klasse angehörende Randfunktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ existieren, gegen die $\mathfrak{f}(s)$ im Mittel über τ mit dem Exponenten 2 konvergiert, wenn man aus dem Inneren des Streifens gegen den Rand geht. Wie man leicht überlegt, sind diese beiden Funktionen, falls sie existieren, im Lebesgueschen Sinne eindeutig bestimmt.

Bevor wir weitere allgemeine Eigenschaften der $\mathfrak{T}$-Transformation zeigen, mögen noch einige spezielle Formeln abgeleitet werden.

Hilfssatz. *1. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist für $0<\Re s<n$*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sz}}{(1+e^z)^n}\,dz=(-1)^{n-1}\binom{s-1}{n-1}\frac{1}{\sin\pi s}. \tag{19}$$

2. Für $0<\Re s<1$ ist

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{e^z-e^\xi}\,dz=e^{-s\xi}\operatorname{cotg}\pi s. \tag{20}$$

3. Für $|\Re s|<1$ ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s\frac{dx}{x-\xi}=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^s\operatorname{cotg}\pi s-\frac{1}{\sin\pi s}. \tag{21}$$

Beweis. Wir setzen

$$J_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sz}}{1+e^z}\,dz.$$

Dieses Integral stellt eine in dem Streifen $0<\Re s<1$ reguläre analytische Funktion von s dar. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß auch noch $\Im s>0$ ist, so kann man die Residuenmethode auf die obere Halbebene anwenden und erhält

$$J_1(s) = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{s i \pi (2n+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Wegen der Regularität gilt die Formel dann in dem ganzen Streifen.

Weiter setzen wir

$$J_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{zs}}{(1+e^z)^n} dz.$$

$J_n(z)$ ist in dem Streifen $0<\Re s<n$ regulär. Durch partielle Integration erhält man die Rekursionsformel

$$J_n(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{zs}}{(1+e^z)^n}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{n}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z(s+1)}}{(1+e^z)^{n+1}} dz = \frac{n}{s} J_{n+1}(s+1).$$

Beschränkt man sich also zunächst auf den Streifen $n-1<\Re s<n$, so folgt

$$J_n(s) = \frac{s-1}{n-1} J_{n-1}(s-1) = \frac{s-1}{n-1} \frac{s-2}{n-2} \cdots \frac{s-n+1}{1} J_1(s-n+1)$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{\pi}{\sin \pi s} \binom{s-1}{n-1}.$$

Wegen der Regularität gilt dies dann auch in $0<\Re s<n$. Damit ist die Formel (19) bewiesen.

Beachtet man, daß

$$K(s) = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta} dz$$

eine in $0<\Re s<1$ reguläre analytische Funktion ist und schreibt

$$K(s) = \int_{\zeta\hookrightarrow} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta} dz + \int_{\hookleftarrow\zeta} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta} dz,$$

so ergibt sich für das zweite Integral $i\pi e^{-s\zeta}$. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß $\Im s<0$, so kann man das erste Integral mittels Anwendung der Residuenmethode auf die obere z-Halbebene auswerten und erhält

$$2\pi i e^{-s\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s 2\pi i n} = \frac{2\pi i e^{-s\zeta}}{e^{2\pi i s} - 1}$$

also

$$K(s) = i\pi e^{-s\zeta} + \frac{2\pi i e^{-s\zeta}}{e^{2\pi i s} - 1} = \pi e^{-s\zeta} \operatorname{cotg} \pi s.$$

Wegen der Regularität gilt dies dann wieder in dem ganzen Streifen, d.h. es gilt (20).

Die Beziehung (21) stellt nur eine Verallgemeinerung der von TRICOMI für reelle s angegebenen Relation (7) dar. Wie man sich leicht überzeugt, wird aber durch die linke Seite von (21) eine in $|\Re\, s| < 1$ regulär analytische Funktion beschrieben, woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt. Im übrigen kann man diese Formel nach Durchführung der Substitution (9) unter Beachtung von (19) und (20) auch leicht direkt beweisen.

Damit folgt dann, wie in der Einleitung schon angedeutet, unter Beachtung der Vertauschungsregel (4):

Satz 4. *Ist $F(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$, so gilt für $|\Re\, s| < 1 - 1/p$ die Beziehung*

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = \mathfrak{f}(s) \cdot \operatorname{cotg} \pi s - \mathfrak{f}(0) \frac{1}{\sin \pi s}. \tag{22}$$

In diesem Zusammenhang interessiert natürlich auch die dem Faltungssatz der Laplace-Transformation entsprechende Aussage. Diese nimmt hier die folgende Form an:

Satz 5. *Sind $F(x)$ und $G(x)$ in $(-1, 1)$ Funktionen der Klasse L^p $(p > 1)$ und wird*

$$H(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1 - \xi^2}{(1 - x\xi)^2} G\left(\frac{x - \xi}{1 - x\xi}\right) \cdot F(\xi)\, d\xi \tag{23}$$

gesetzt, so gehört $H(x)$ jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ an, und für $\Re\, s < 1 - 1/p$ ist

$$\mathfrak{T}\{H(x)\} = \mathfrak{T}\{F(x)\} \cdot \mathfrak{T}\{G(x)\}. \tag{24}$$

Ist $G(x)$ eine Funktion der Klasse L^q mit $q > p$, so gehört auch $H(x)$ zu L^p.

Beweis. Wie man sich leicht überzeugt, entspricht der Funktion $H(x)$ bei der Substitution (9) der Ausdruck

$$h(z) = \frac{(1 + e^z)^2}{2e^z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z - \zeta)\, 2e^{z-\zeta}}{(1 + e^{z-\zeta})^2} \cdot \frac{f(\zeta)\, 2e^{\zeta}}{(1 + e^{\zeta})^2}\, d\zeta. \tag{25}$$

Setzt man

$$h_1(z, \sigma) = \frac{h(z)\, 2e^{z(1-\sigma)}}{(1 + e^z)^2}$$

und führt entsprechend die Funktionen $g_1(z, \sigma)$ und $f_1(z, \sigma)$ ein, so geht (25) in

$$h_1(z, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z - \zeta, \sigma) \cdot f_1(\zeta, \sigma)\, d\zeta \tag{26}$$

über. Nun ist aber $g_1(z, \sigma)$ für $|\sigma| < 1 - 1/p$ in z eine Funktion der Klasse L und es gilt für ihre Fourier-Transformierte

$$\mathfrak{F}\{g_1(z, \sigma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau z} g_1(z, \sigma)\, dz = \mathfrak{T}\{G(x)\}.$$

Die entsprechende Aussage gilt auch für $f_1(z, \sigma)$. Beachtet man schließlich noch, daß $f_1(z, \sigma)$ für jedes σ mit $|\sigma| \leqq 1 - 1/p$ zur Klasse L^p gehört, so folgt[8]:

1. $h_1(z, \sigma)$ gehört für $|\sigma| < 1 - 1/p$ in z zur Klasse L^p,
2. $h_1(z, \sigma)$ hat die Fourier-Transformierte $\mathfrak{f}(s)\,\mathfrak{g}(s)$.

Damit ist insbesondere die Beziehung (24) bewiesen. Aus der ersten Eigenschaft ergibt sich weiter genau wie oben [Formel (16)], daß dann $H(x)$ zu jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ gehört.

Ist $q > p$, so kann die Betrachtung auch an den Stellen $\sigma = \pm\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ durchgeführt werden und man folgert daraus, daß $H(x)$ eine Funktion der Klasse L^p ist.

Abschließend sollen nun noch einige spezielle Transformierte in einer Tabelle zusammengestellt werden.

Tabelle 1.

	$F(x)$	$\mathfrak{f}(s)$
1	1	$\dfrac{2\pi s}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert \Re s \rvert < 1$
2	x	$-\dfrac{2\pi s^2}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert \Re s \rvert < 1$
3	x^n	$-\dfrac{2\pi}{\sin \pi s} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}\binom{\nu - s}{n+1}$, $\quad \lvert \Re s \rvert < 1$
4	$\left[\ln \dfrac{1+x}{1-x}\right]^n$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} \dfrac{2\pi s}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert \Re s \rvert < 1$
5	$\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$, $\quad \lvert \Re \alpha \rvert < 1$	$\dfrac{2\pi(s-\alpha)}{\sin \pi(s-\alpha)}$, $\quad -1 + \Re \alpha < \Re s < 1 + \Re \alpha$
6	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$, $\quad \lvert \Re \alpha \rvert < \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\pi}{\cos \pi(s-\alpha)}$, $\quad -\dfrac{1}{2} + \Re \alpha < \Re s < \dfrac{1}{2} + \Re \alpha$
7	$\dfrac{[\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}]^2}{x\sqrt{1-x^2}}$	$-4\pi \dfrac{1 - \cos \pi s}{\sin 2\pi s}$, $\quad \lvert \Re s \rvert < \dfrac{1}{2}$

Desgleichen werden in der folgenden Tabelle die Transformierten einiger Integraloperationen angegeben. Dabei setzen wir voraus, daß die Funktion $F(x)$, auf die die Operation angewendet wird, einer Klasse L^p mit $1 < p \leqq 2$ angehört. In der dritten Spalte der Tabelle ist der Klassenexponent angeführt, zu dem die durch die Integraloperation erzeugte Funktion $H(x)$ sicher angehört.

[8] TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 106, Theorem 77. Oxford 1948.

Tabelle 2.

	$H(x)$		$\mathfrak{h}(x)$
1	$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$	p	$\mathfrak{f}(s) \operatorname{cotg} \pi s - \frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s}$
2	$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\xi}{1-x\xi} F(\xi) d\xi$	$p-\varepsilon$ $\varepsilon > 0$ ε bel.	$-\frac{1}{\sin \pi s} [\mathfrak{f}(s) - \mathfrak{f}(0)]$
3	$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$	$p-\varepsilon$	$-\operatorname{tg} \pi s \cdot \mathfrak{f}(s)$
4	$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{1-x} \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$ $-1 < \Re \alpha < 0$	$q-\varepsilon$ *)	$\operatorname{cotg} \pi(s-\alpha) \cdot \mathfrak{f}(s)$
5	$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{i\beta} \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$	p	$\operatorname{cotg} \pi(s-i\beta) \cdot \mathfrak{f}(s) - \frac{\mathfrak{f}(i\beta)}{\sin \pi(s-i\beta)}$

Die erste dieser Relationen ist mit (22) identisch. $H(x)$ gehört dabei als Hilbert-Transformierte[1]) mit $F(x)$ zu L^p. Um die zweite Relation zu beweisen, beachte man, daß der Funktion $H(x)$ die Funktion

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+e^z)(e^\zeta - 1) e^\zeta}{(e^z + e^\zeta)(1+e^\zeta)^2} f(\zeta) d\zeta$$

entspricht. Weiter erhält man für $0 < \Re s < 1$ unter Benutzung der Formel (19)

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)z}}{(1+e^z)(e^z+e^\zeta)} dz &= \frac{1}{e^\zeta - 1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)z}}{1+e^z} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z+e^\zeta} dz \right\} \\ &= \frac{1}{e^\zeta - 1} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi s} [1 - e^{-s\zeta}]. \end{aligned} \right.$$

Nun sind aber beide Seiten von (27) in dem Gebiet $|\Re s| < 1$ regulär, und mithin gilt diese Beziehung auch in diesem Streifen.

Bildet man zunächst einmal rein formal die Transformierte der Funktion $H(x)$, so wird

$$(28) \quad \mathfrak{h}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{(1-s)z}}{(1+e^z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^\zeta - 1) e^\zeta f(\zeta)}{(e^z+e^\zeta)(1+e^\zeta)^2} d\zeta.$$

*) $\operatorname{Min}\left[-\Re \alpha,\ 1+\Re \alpha,\ 1-\frac{1}{p}\right] = 1 - \frac{1}{q}$.

Nach dem Satz von Fubini darf darin die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, wenn $|\Re s| < 1 - 1/p$, denn es ist wegen (27)

$$(29)\quad \begin{cases} 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{\zeta}-1|\,e^{\zeta}}{(1+e^{\zeta})^2}\,|f(\zeta)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-\sigma)z}}{(e^{z}+1)\,(e^{z}+e^{\zeta})}\,dz\,d\zeta \\ \qquad = \frac{2\pi}{\sin \pi\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\zeta}(1-e^{-\sigma\zeta})}{(1+e^{\zeta})^2}\,|f(\zeta)|\,\frac{|e^{\zeta}-1|}{e^{\zeta}-1}\,d\zeta \end{cases}$$

und dieses Integral existiert, falls $|\sigma| < 1 - 1/p$ ist. Setzt man nämlich

$$F_2(x) = \begin{cases} |F(x)| & \text{für } x \geqq 0 \\ -|F(x)| & x < 0, \end{cases}$$

so gehört auch $F_2(x)$ zur Klasse L^p und mithin kann für (29) auch

$$\frac{\pi}{\sin \pi\sigma}\,[\mathfrak{f}_2(0) - \mathfrak{f}_2(\sigma)]$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck existiert nach Satz 1, wenn $|\sigma| < 1 - 1/p$ ist, und mithin ist dann auch die Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt.

Führt man die letzte Betrachtung speziell für $s = 0$ durch, so sieht man, daß $h(z)\,e^{z}/(1+e^{z})^2$ zur Klasse L gehört, d.h., $H(x)$ gehört zu L.

Führt man die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (28) durch, so folgt wegen (27)

$$(30)\qquad \mathfrak{h}(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,[\mathfrak{f}(0) - \mathfrak{f}(s)].$$

Nun gehört aber die rechte Seite für jedes $|\sigma| < 1 - 1/p$ als Funktion von τ zur Klasse L^2, da wir weiter $H(x)$ schon als absolut integrabel erkannt haben, so ergibt sich damit nach Satz 3, daß $H(x)$ Funktion jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ ist.

Die restlichen Beziehungen der Tabelle 2 werden im Laufe der folgenden Untersuchungen bewiesen.

3. Die Integralgleichung $\mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x)$.

Diese Integralgleichung ist bereits mehrfach untersucht worden[9]). Trotzdem soll hier noch einmal darauf eingegangen werden, da sich die Voraussetzungen noch etwas allgemeiner fassen lassen, als es in den genannten Arbeiten der Fall ist.

[9]) SCHRÖDER, K.: Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Preuß. Akad. phys.-math. Kl. **1938**, 345—362. — SÖHNGEN, H.: Die Lösung der Integralgleichung ... und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Z. **45**, 245—264 (1939). — WEISSINGER, J.: Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie. Math. Z. **47**, 16—33 (1941). — TRICOMI, F. G.[2]). — NICKEL, K.: Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie. Math. Z. **54**, 81—96 (1951).

Satz 6. *Gehört die Funktion $G(x)$ in $(-1, 1)$ einer Klasse L^p $(p>1)$ an, so wird die allgemeinste einer Klasse L^q $(q>1)$ angehörende Lösung der Integralgleichung*

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x), \qquad |x|<1$$

für fast alle x aus diesem Intervall durch

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\!\!\!\!\!\!-\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{C}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{31}$$

geliefert, wobei $C = \int_{-1}^{1} F(x)\,dx$ beliebig vorgegeben werden kann.

Ist $p \leqq 2$, so gehört $F(x)$ zu jeder Klasse L^q mit $q<p$.

Beweis. Da wir uns nur für solche Lösungen interessieren, die einer Klasse L^q $(q>1)$ angehören und dann damit auch $\mathfrak{H}\{F(x)\}$ wieder aus dieser Klasse ist, so darf auf die Integralgleichung die $\mathfrak{T}$-Transformation angewendet werden, und man erhält als notwendige Bedingung der $F(x)$ genügen muß,

$$\operatorname{cotg}\pi s\cdot \mathfrak{f}(s) - \frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin\pi s} = \mathfrak{g}(s) \tag{32}$$

d.h.,

$$\mathfrak{f}(s) = \operatorname{tg}\pi s\cdot\mathfrak{g}(s) + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\cos\pi s}. \tag{33}$$

Darauf könnte man die Umkehrformel (12) anwenden und daraus $F(x)$ berechnen. Wir schlagen hier aber einen anderen Weg ein, der uns schneller zum Ziel führt.

Es ist

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\pi s\cdot\mathfrak{g}(s) + \dfrac{\mathfrak{f}(0)}{\cos\pi s} = \left(\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi s - \dfrac{1}{\sin\pi s}\right)\mathfrak{g}(s) - \\ \qquad - \left(\operatorname{cotg}\pi s\cdot\mathfrak{g}(s) - \dfrac{\mathfrak{g}(0)}{\sin\pi s}\right) + \dfrac{1}{\sin\pi s}\left(\mathfrak{g}(s) - \mathfrak{g}(0)\right) + \dfrac{\mathfrak{f}(0)}{\cos\pi s} \end{cases} \tag{34}$$

und

$$\left(\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi s - \frac{1}{\sin\pi s}\right)\mathfrak{g}(s) = 2\,\frac{1-\cos\pi s}{\sin 2\pi s}\,\mathfrak{g}(s).$$

Darin ist der erste Faktor [s. Tabelle 1, Formel (7)] die Transformierte der Funktion

$$H(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]^2}{x\sqrt{1-x^2}}$$

und mithin ist nach dem Faltungssatz sowie den Formeln (1) und (2) der Tabelle 2

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\pi s\cdot\mathfrak{g}(s) + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\cos\pi s} &= \mathfrak{T}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{1-\xi^2}{(1-x\xi)^2}\,H\!\left(\frac{x-\xi}{1-x\xi}\right)G(\xi)\,d\xi - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\!\!\!\!\!\!-\,\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi\,G(\xi)}{1-x\xi}\,d\xi + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right\} \\ &= \mathfrak{T}\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\!\!\!\!\!\!-\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right\} \end{aligned}$$

d.h., die Transformierte der rechten Seite von (31) genügt in der Tat der Gl. (33). Weiter folgt aus der Zerlegung (34) sowie dem Faltungssatz und den in der Tabelle 2 in den Formeln (1) und (2) gemachten Aussagen, daß die rechte Seite von (31) für $p \leq 2$ jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ angehört. Schließlich ist damit auch die Formel 3 der Tabelle 2 bewiesen.

Zu zeigen bleibt noch, daß die rechte Seite von (31), wir wollen sie mit $F_1(x)$ bezeichnen, der Integralgleichung genügt. Die Transformierte von $F_1(x)$ ist mit $C = \mathfrak{f}(0)$ gleich der rechten Seite von (33), insbesondere also $\mathfrak{f}_1(0) = \mathfrak{f}(0)$. Weiter kann die Hilbert-Transformierte von $F_1(x)$ gebildet werden, wir wollen sie $G_1(x)$ nennen. Dann ist

$$\mathfrak{T}\{G_1(x)\} = \operatorname{cotg} \pi s \cdot \mathfrak{T}\{F_1(x)\} - \frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s} = \mathfrak{g}(s)$$

d.h., $G(x)$ und $G_1(x)$ haben dieselbe Transformierte und stimmen daher, da sie zur Klasse L gehören, fast überall überein. Dies folgt aus dem entsprechenden Satz über die Fourier-Transformation. Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Integralgleichung im allgemeinen auch dann keine Lösung der Klasse L^2 zuläßt, wenn $G(x)$ in dieser Klasse liegt. Zur quadratischen Integrabilität von $F(x)$ ist ja nach Satz 2 notwendig, daß $\mathfrak{f}(s)$ im Mittel für $\sigma \to \pm 1/2$ gegen Randwerte konvergiert, die der Klasse L^2 angehören. Dies ist aber wegen des Aufbaus (33) der Funktion $\mathfrak{f}(s)$ im allgemeinen nicht der Fall und kann auch durch geeignete Wahl von $\mathfrak{f}(0)$ nicht erreicht werden.

4. Die Integralgleichung $F(x) + \lambda \mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x)$.

Wir wollen dabei zulassen, daß der Parameter $\lambda \neq 0$ auch komplex sein kann. Die Funktion $G(x)$ gehöre einer Klasse L^p $(p > 1)$ an. Wir suchen auch hier wieder diejenigen Lösungen $F(x)$, die in einer Klasse L^q $(q > 1)$ liegen.

Im homogenen Fall ergibt sich für die $\mathfrak{T}$-Transformierte von $F(x)$

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\lambda \mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s + \lambda \cos \pi s}. \tag{35}$$

Soll $F(x)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ angehören, so muß notwendig $\mathfrak{f}(s)$ in einem Streifen um die imaginäre Achse regulär sein, d.h., der Nenner der rechten Seite von (35) darf keine Nullstellen auf der imaginären Achse haben. Diese liegen aber an den Stellen $s = \alpha$, für die

$$\operatorname{tg} \pi \alpha = -\lambda, \quad \text{d.h.} \quad e^{i 2\pi \alpha} = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda} \tag{36}$$

ist. Damit α nicht rein imaginär ist, ist notwendig und hinreichend, daß λ nicht in dem Intervall $[-i, i]$ der imaginären Achse liegt. Dabei sind auch die Endpunkte mit auszunehmen, denn für $\lambda = -i$ z.B. nimmt ja die rechte Seite von (35) die Form

$$\frac{\mathfrak{f}(0)}{e^{i\pi s}}$$

an. Das ist aber bestimmt keine $\mathfrak{T}$-Transformierte, denn dieser Ausdruck verschwindet für $s = i\,\tau \to i\,\infty$ nicht.

Damit ist gezeigt, daß die homogene Gleichung nur die triviale Lösung zuläßt, wenn λ in dem Intervall $[-i, i]$ liegt.

Wir setzen nun voraus, daß λ nicht dem genannten Intervall angehört und verstehen unter α diejenige Lösung der Gl. (36), für die

$$-1 < \Re\,\alpha \leqq 0 \tag{37}$$

ist. Damit ist α eindeutig bestimmt und (35) kann in der Form

$$\mathfrak{f}(s) = -\frac{\sin \pi\alpha\, \mathfrak{f}(0)}{\sin \pi(s-\alpha)} \tag{38}$$

geschrieben werden. Aus der Tabelle 1 Formel (6) entnimmt man, daß

$$F_0(x) = -\frac{\mathfrak{f}(0)\sin \pi\alpha}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} = -\frac{\mathfrak{f}(0)\sin \pi\alpha}{\pi(1-x)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \tag{39}$$

eine Funktion ist, die einer Klasse L^q $(q > 1)$ angehört und deren $\mathfrak{T}$-Transformierte gleich der rechten Seite von (38) ist. Daraus folgert man genau wie früher, daß $F_0(x)$ auch der homogenen Gleichung genügt und mithin die allgemeine Lösung dieser Gleichung darstellt.

Besonders interessant sind natürlich die Funktionen, die bei der endlichen Hilbert-Transformation in sich übergehen. Für sie ist $\lambda = -1$ und mithin $\alpha = -3/4$. Die Gesamtheit dieser Funktionen wird also durch

$$\frac{C}{(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}}$$

beschrieben.

Wir kommen nun zu dem inhomogenen Fall und wollen auch dabei zunächst voraussetzen, daß λ nicht in dem Intervall $[-i, i]$ liegt. Für die Transformierte der gesuchten Lösung erhält man

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\mathfrak{g}(s)\sin \pi s + \lambda\,\mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s + \lambda \cos \pi s} \tag{40}$$

eine Funktion, die in einem Streifen um die imaginäre Achse regulär ist. Statt auf (40) die Umkehrformel anzuwenden — ursprünglich wurde das Ergebnis so gewonnen — gehen wir der Kürze wegen, von der Funktion

$$H(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} - \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-x^2}}\right]\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

aus, der bei der Substitution (9)

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1+e^z)^{\frac{1}{2}}}{2e^{\frac{z}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}}\,\frac{2e^{\frac{\zeta}{2}}\,g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^{\frac{1}{2}}}\,d\zeta \tag{41}$$

entspricht. Die Transformierte von $H(x)$ wird mithin

$$(42)\qquad \begin{cases} \mathfrak{h}(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}} \cdot \frac{2e^{\zeta} g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^2}\, d\zeta\, dz \\ \quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{\zeta} g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} \frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}}\, dz\, d\zeta. \end{cases}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist dabei für Werte von s aus einem geeignet zu bestimmenden Streifen um die imaginäre Achse erlaubt, denn es existiert das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{\zeta}|g(\zeta)|}{(1+e^{\zeta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\Re s} \left| \frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}} \right| dz\, d\zeta,$$

da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\Re s} \left| \frac{e^{-(\zeta-z)\alpha} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}} \right| dz = e^{-\zeta\Re s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\Re s} \left| \frac{e^{\alpha u} - e^{-\frac{1}{2}u}}{1-e^{-u}} \right| du$$

und mit geeigneten Konstanten C und $\delta > 0$

$$\left| \frac{e^{\alpha u} - e^{-\frac{1}{2}u}}{1-e^{-u}} \right| < C\, e^{-\delta u}$$

ist. Die Vertauschung darf also nach dem Satz von Fubini sicher dann vorgenommen werden, wenn $|\Re s| < \operatorname{Min}(1-1/p, \delta)$ ist. Insbesondere sieht man so für $s=0$ ein, daß $h(z)\, e^z/(1+e^z)^2$ und damit auch $H(x)$ zur Klasse L gehört. Weiter liefert die Formel (19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} \frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}}\, dz = \pi e^{-\zeta s}[\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)],$$

und damit folgt dann schließlich aus (42)

$$\mathfrak{h}(s) = [\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)]\, \mathfrak{g}(s) = \frac{\cos\pi\alpha}{\cos\pi s \sin\pi(s-\alpha)}\, \mathfrak{g}(s)$$

Darin ist der erste Faktor in dem Streifen $|\Re s| < \operatorname{Min}(-\Re\alpha, 1+\Re\alpha, \frac{1}{2})$ regulär und verschwindet im Unendlichen exponentiell. Setzt man

$$\operatorname{Min}\left[-\Re\alpha,\ 1+\Re\alpha,\ \frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{p}\right] = 1-\frac{1}{p_1}, \qquad (p_1 > 1)$$

so ist $\mathfrak{h}(s)$ in $|\Re s| < 1-1/p_1$ regulär und gehört dort als Funktion von τ sicher zu L^2 in $(-\infty, +\infty)$. Aus Satz 2 folgt dann, daß $H(x)$ sicher in jeder Klasse L^q mit $q < p_1$ liegt. Weiter zeigten wir bereits, daß

$$\mathfrak{T}\left\{ -\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{G(\xi)}{x-\xi}\, d\xi \right\} = \operatorname{tg}\pi s \cdot \mathfrak{g}(s)$$

ist, und die Originalfunktion jeder Klasse L^q mit der genannten Eigenschaft angehört. Damit folgt für $-1<\Re\,\alpha<0$ die Beziehung

$$(43)\qquad \mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\}=\operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)\cdot\mathfrak{g}(s)\,.$$

Gleichzeitig ist bewiesen, daß die Originalfunktion in (43) sicher in jeder Klasse L^q mit $q<p_1$ liegt, d.h., es gilt die Formel (4) in Tabelle 2. Damit zeigt man nun leicht, daß die Funktion

$$F_1(x)=\frac{1}{1+\lambda^2}\,G(x)-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1+x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\,,\qquad(44)$$

die ja ebenfalls zu L^q gehört, die Transformierte

$$(45)\qquad \mathfrak{T}\{F_1(x)\}=\frac{\mathfrak{g}(s)}{1+\lambda\operatorname{cotg}\pi s}$$

hat, woraus dann genau wie in III. folgt, daß $F_1(x)$ auch der Integralgleichung genügt, und zwar stellt $F_1(x)$ diejenige Lösung dar, für die

$$\int_{-1}^{1}F(x)\,dx=0$$

ist. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Integralgleichung ergibt sich dann durch Superposition von (39) und (44) zu

$$(46)\qquad F(x)=F_1(x)+F_0(x)\,,$$

wobei die in $F_0(x)$ steckende Konstante $\mathfrak{f}(0)$ beliebig gewählt werden kann. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß λ nicht in dem Intervall $[-i,\,i]$ liegt.

Zu untersuchen bleiben noch die Verhältnisse, wenn λ dem Ausnahmeintervall angehört.

Setzt man speziell $G(x)=1$ und $\lambda=-i$, so geht (40) in

$$\mathfrak{f}(s)=i\,[2\pi s-i\,\mathfrak{f}(0)]\,e^{-i\pi s}$$

über. Da dieser Ausdruck für $s\to i\,\infty$ nicht verschwindet, so ist er nicht die Transformierte einer Funktion der Klasse L, d.h., die inhomogene Integralgleichung läßt für $\lambda=-i$ im allgemeinen keine Lösung zu. Entsprechendes gilt auch für $\lambda=+i$.

Ist $\lambda=i\,\lambda_1$ mit $|\lambda_1|<1$ aber $\lambda_1\neq 0$, so verstehen wir unter α die rein imaginäre Größe, die der Gl. (36) genügt. Da α in dem Regularitätsbereich der Funktion $\mathfrak{g}(s)$ liegt, so kann eine Lösung der von uns betrachteten Art nur dann erwartet werden [s. (40)], wenn $\mathfrak{g}(\alpha)\sin\pi\alpha+\lambda\,\mathfrak{f}(0)=0$, d.h.

$$(47)\qquad \mathfrak{f}(0)=\cos\pi\alpha\,\mathfrak{g}(\alpha)$$

ist, denn anderenfalls würde ja $\mathfrak{f}(s)$ eine Singularität auf der imaginären Achse besitzen. Geht man nun mit diesem Wert von $\mathfrak{f}(0)$ zunächst einmal rein

formal in den Ausdruck (46) ein, so erhält man die Funktion

$$F_3(x) = \frac{G(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left[\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right]^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi, \tag{48}$$

die mit $G(x)$ auch wieder zur Klasse L^p gehört. Wir wollen zeigen, daß sie der Integralgleichung genügt und bilden dazu ihre Transformierte und zeigen von dieser, daß sie der Gl. (40) genügt. Daraus folgt dann auch umgekehrt, daß die Integralgleichung befriedigt wird.

Es ist

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s-\alpha}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Ist $|\Re s| < 1 - 1/p$, so darf darin die Integrationsreihenfolge vertauscht werden[10]) und man erhält mit (21)

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\cdot\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\} = \mathfrak{g}(s)\operatorname{cotg}\pi s - \frac{\mathfrak{g}(\alpha)}{\sin\pi(s-\alpha)},$$

d.h., es gilt die Bez. (5) der Tabelle 2. Damit wird dann in der Tat

$$\mathfrak{T}\{F_3(x)\} = \frac{\mathfrak{g}(s)\sin\pi s - \mathfrak{g}(\alpha)\sin\pi\alpha}{\sin\pi s + \lambda\cos\pi s}.$$

Die Funktion $F_3(x)$ genügt also auch der inhomogenen Integralgleichung und stellt damit die einzige Lösung dar, die diese besitzt, wenn $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 < \lambda_1 < 1$ ist.

Abschließend wollen wir noch untersuchen, wann die Integralgleichung Lösungen besitzt, die zu L^2 gehören. Wir wollen dabei voraussetzen, daß $G(x)$ selbst in dieser Klasse liegt. Wie aus dem Satz 2 hervorgeht, ist für die quadratische Integrabilität von $F(x)$ notwendig, daß $\mathfrak{f}(s)$ in dem Streifen $|\Re s| < 1/2$ regulär und als Funktion von τ in $(-\infty, \infty)$ zu L^2 gehört. Weiter müssen zwei Randfunktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ in der Klasse L^2 existieren, für die

$$\lim_{\substack{\sigma\to\frac{1}{2}\\ |\sigma|<\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau = \lim_{\substack{\sigma\to-\frac{1}{2}\\ |\sigma|<\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau = 0$$

ist. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt und weiß man, daß $F(x)$ zur Klasse L gehört, so folgt auch daraus nach Satz 3, daß $F(x)$ eine Funktion der Klasse L^2 ist.

Die Fälle $\lambda = \pm i$ können wir sofort ausschließen, da dann, wie wir schon sahen, die Integralgleichung im allgemeinen keine Lösung besitzt. Weiter wollen wir annehmen, daß α nicht von der Form $\alpha = -\frac{1}{2} + i\beta$ ist (β reell). Setzt man dies voraus, so hat die durch (40) gegebene Funktion $\mathfrak{f}(s)$ im all-

[10]) TRICOMI, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) 2, 202 (1951).

gemeinen genau einen Pol im Inneren des Streifens $|\Re s| < 1/2$, und sie ist dort dann und nur dann regulär wenn $\mathfrak{f}(0)$ der Bedingung (47) genügt. Diese muß notwendig erfüllt sein, wenn $F(x)$ zur Klasse L^2 gehören soll. Diese Bedingung reicht aber auch aus, denn ist sie erfüllt, so ist $\mathfrak{f}(s)$ in $|\Re s| < 1/2$ regulär, und es existieren zwei Randfunktionen mit den verlangten Eigenschaften, da $\mathfrak{g}(s)$ derartige Randfunktionen besitzt, und der Nenner in der Umgebung der Ränder regulär ist und auf diesen mit τ über alle Grenzen wächst. Weiter gehört $F(x)$, wie wir früher schon zeigten, zur Klasse L. Die Integralgleichung hat also in diesem Fall genau eine Lösung der Klasse L^2, und zwar wird diese Lösung durch den Ausdruck (48) geliefert, denn dieser entspricht ja der Bedingung (47).

Ist α von der Form $-\frac{1}{2} + i\beta$, d.h., $\lambda = i\lambda_1$ mit reellem λ_1 und $|\lambda_1| > 1$, so ist zwar $\mathfrak{f}(s)$ für jede Wahl von $\mathfrak{f}(0)$ in $|\Re s| < 1/2$ regulär, der Nenner von (40) hat dann aber auf beiden Rändern einfache Nullstellen, und man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{f}(s)$, wie man die Konstante $\mathfrak{f}(0)$ auch wählt, im allgemeinen Fall keine Randfunktionen besitzt, die in $(-\infty, \infty)$ zu L^2 gehören, denn die Randfunktionen von $\mathfrak{f}(s)$ werden ja durch (40) geliefert, wenn man darin $\mathfrak{g}(s)$ durch die zugehörigen Randfunktionen ersetzt. Die Zugehörigkeit dieser Randfunktionen von $\mathfrak{f}(s)$ zur Klasse L^2, läßt sich im allgemeinen nicht dadurch erreichen, daß man $\mathfrak{f}(0)$ geeignet wählt, sie erfordert vielmehr ein geeignetes Verhalten der Funktion $\mathfrak{g}(s)$ bei Annäherung an die beiden Nullstellen des Nenners. Die Integralgleichung läßt also für derartige λ-Werte im allgemeinen keine Lösung aus der Klasse L^2 zu.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 7. *Ist $G(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$ und werden solche Lösungen der Integralgleichung*

$$F(x) + \lambda \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi} d\xi = G(x)$$

gesucht, die in $(-1, 1)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ angehören, so gilt, wenn für $\lambda \neq \pm i$

$$\frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda} = e^{i 2\pi\alpha} \quad \text{mit} \quad -1 < \Re\alpha \leq 0$$

ist:

1. Ist $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 \leq \lambda_1 \leq 1$, so hat die homogene Gleichung nur die triviale Lösung. Liegt λ nicht in diesem Bereich, so wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch

$$\text{(I)} \qquad F_0(x) = -C \frac{\sin \pi\alpha}{\pi(1 - x)} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\alpha}$$

gegeben, wobei

$$C = \int_{-1}^{1} F_0(x)\, dx$$

ist.

2. Liegt λ nicht in dem in 1. genannten Intervall, so liefert der Ausdruck

$$\text{(II)} \quad F(x) = \frac{G(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\cdot\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi + F_0(x),$$

wobei die Konstante $C = \int_{-1}^{1} F(x)\,dx$ beliebig vorgegeben werden kann, die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Ist $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 < \lambda_1 < 1$, so besitzt die inhomogene Gleichung genau eine Lösung. Man erhält sie aus (II), *wenn man dort*

$$\text{(III)} \qquad C = \cos\pi\alpha \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} G(x)\,dx$$

setzt.

Ist $\lambda = \pm i$, so ist die inhomogene Gleichung im allgemeinen nicht lösbar.

3. Gehört $G(x)$ zur Klasse L^2 und werden Lösungen gesucht, die ebenfalls dieser Klasse angehören, so gilt:

Für $\lambda = i\lambda_1$ mit $|\lambda_1| \geq 1$ ist die Integralgleichung im allgemeinen nicht lösbar. Liegt dagegen λ nicht in diesem Bereich, so existiert genau eine Lösung. Man erhält sie aus (II), *wenn man dort die Konstante C gemäß der Bedingung* (III) *wählt.*

Ganz analog wie die obenstehende Integralgleichung lassen sich auch solche der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \mathfrak{H}^\nu\{F(x)\} = G(x)$$

behandeln. Die Bestimmung der Lösungen ist dann im wesentlichen gleichbedeutend mit der Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms.

5. Ein Beispiel aus der Festigkeitslehre.

Für die Bodenpressung einer Staumauer gibt TÖLKE[11]) das folgende Integralgleichungssystem an:

$$\text{(49)} \qquad V(x) = -\varepsilon\,\mathfrak{H}\{H(x)\}, \qquad H(x) = \varepsilon k + \varepsilon\,\mathfrak{H}\{V(x)\}.$$

Dabei sind $V(x)$ und $H(x)$ die Vertikal- bzw. Horizontalkomponente der gesuchten Pressung, ε ist eine Konstante > 1, die durch das Mauerwerk gegeben ist, k ist eine noch freie Konstante. Durch die Staumauer und die Füllung des Beckens sind weiter die folgenden drei Integrale

$$\text{(50)} \qquad \int_{-1}^{1} V(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} H(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} x\,V(x)\,dx$$

gegeben.

Sowohl von TÖLKE als auch von SCHMEIDLER wurden Näherungslösungen angegeben. Es soll hier die exakte Lösung bestimmt werden.

[11]) TÖLKE, F.: Talsperren. In Handbibliothek für Bauingenieure, III. Teil, Bd. 9, zweite Hälfte, erster Teil, S. 408. — SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, S. 427. Leipzig 1950.

Setzt man

$$F(x) = V(x) + i\,H(x),$$

so ist das System (49) gleichbedeutend mit der Integralgleichung

$$F(x) - i\,\varepsilon\,\mathfrak{H}\{F(x)\} = i\,\varepsilon\,k$$

deren allgemeine Lösung nach Satz 7 mit

$$\lambda = -\,i\,\varepsilon, \qquad \alpha = -\,\frac{1}{2} + i\,\beta, \qquad e^{2\pi\beta} = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$$

durch den Ausdruck (II) gegeben ist, wobei $G(x) = i\,\varepsilon\,k$ und die in $F_0(x)$ steckende Konstante

$$C = \mathfrak{f}(0) = \mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0) = \int_{-1}^{1} [V(x) + i\,H(x)]\,dx$$

ist, sie ist wegen (50) als bekannt anzusehen.

Beachtet man die Formeln (19) und (20), so liefert eine einfache Rechnung die Beziehung

$$\frac{1}{\pi}\,\mathfrak{G}\!\int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{x-\xi}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha} d\xi = \left\{-(1-x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \operatorname{cotg}\pi\alpha + \frac{2\alpha}{\sin\pi\alpha} + \frac{1-x}{\sin\pi\alpha}\right\}$$

aus der dann

$$V(x) + i\,H(x) = \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{\varepsilon^2-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta}\{[\mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0)] + \pi\,k\,[x - 2i\beta]\}$$

folgt. Darin ist die Konstante k noch so zu bestimmen, daß $\int_{-1}^{1} x\,V(x)\,dx$ einen gegebenen Wert M annimmt. Wegen der aus (19) folgenden Gleichungen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta} dx = -\frac{2i\beta\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta} dx = \frac{(1-4\beta^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2\varepsilon}$$

erhält man

$$\int_{-1}^{1} x\,F(x)\,dx = \{[\mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0)]\,2i\beta + \pi\,k\,\tfrac{1}{2}\,[1 + 4\beta^2]\}$$

und damit

$$k = \frac{2M + 4\beta\,\mathfrak{h}(0)}{\pi(1+4\beta^2)},$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Darmstadt, Institut für Mathematik der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 13. September 1953.)

THOSAR, YESHWANT V.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 52—60 (1954)

Generalisations of Neumann's formula for $Q_n(y)$.

By
YESHWANT V. THOSAR.

Sometime back GORMLEY [3, p. 149, (5)] gave a generalisation of Neumann's formula

$$Q_n(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)}\,dx \tag{1}$$

in the form

$$Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m}{2}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)\frac{dx}{(y-x)}, \tag{2}$$

where n, m are positive integers and $n \geq m \geq 0$.

In this paper we first obtain two other generalisations (one of which is new) by a different method. These are further used to get some expansions involving $Q_n(y)$ and $Q_n^m(y)$. Some other results involving associated Legendre Functions are also derived.

We obtain a remarkable result (5) which is more general than all the three foregoing generalisations. It is then used for getting certain expansions involving the Q-functions.

Note. Throughout the paper n, m are positive integers and x, y are real such that $-1 \leq x \leq 1$, $y > 1$.

§ 1.

Take [4, p. 58]

$$\frac{1}{(y-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(x)\,Q_n(y), \tag{1.1}$$

where the expansion on the right is uniformly convergent for $-1 \leq x \leq 1$ and $y > 1$.

Differentiate (1.1) m times[1]) with respect to x, multiply by $(1-x^2)^{m/2}$ and use FERRER's definition of $P_n^m(x)$.

Then we get

$$\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} = \frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,P_n^m(x)\,Q_n(y) \tag{1.2}$$

valid for $n \geq m \geq 0$.

[1]) This and similar processes employed in this paper are easily justifiable.

If we differentiate (1.1) m times with respect to y, we get similarly

$$(1.3) \qquad \frac{(y^2-1)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(x)\, Q_n^m(y),$$

where m is any nonnegative integer.

Using the orthogonal properties of $P_n^m(x)$ and $P_n(x)$ with (1.2) and (1.3) respectively, we have the following integral representations for $Q_n(y)$ and $Q_n^m(y)$:

$$(3) \qquad Q_n(y) = \frac{m!}{2} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} P_n^m(x)\, dx,$$

where $n \geq m \geq 0$.

$$(4) \qquad Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m}{2} \cdot m!\,(y^2-1)^{m/2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\, dx,$$

where n, m are any non negative integers.

When $m=0$ both the formulae (3) and (4) reduce to Neumann's equation (1).

(3) seems to be new while (4) was recorded by Hobson [4, p. 116] and obtained by him by a different procedure.

Comparing (4) and (2) we get

$$(1.4) \qquad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m/2} P_n^m(x) \frac{dx}{(y-x)} = m!\,(y^2-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\, dx$$

while from (3) and (1), we similarly have

$$(1.5) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} P_n^m(x)\, dx = \frac{(n+m)!}{m!\,(n-m)!} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)}\, dx.$$

Differentiate (1.5) m times with respect to y under the sign of integration and then compare it with (1.4). Then we get

$$(1.6) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P_n^m(x)\, dx}{(y-x)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2m)!\,(y^2-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P_n^m(x)\, dx}{(y-x)^{2m+1}}.$$

(1.4), (1.5) and (1.6) are all valid for $n \geq m \geq 0$.

§ 2.

We shall now evaluate some infinite series involving squares or products of the Q-functions.

Multiply both sides of (1.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}}$ and integrate with respect to x between -1 and $+1$.

Then, using (3), we have

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^2(y) = \frac{(m!)^2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{2m+2}}\,dx.$$

The integral on the right, on making the substitution $x = 2t-1$, becomes expressible in terms of the Beta function and therefore

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^2(y) = \frac{2^{2m}(m!)^4}{(2m+1)!}(y^2-1)^{-m-1}, \tag{2.1}$$

where $n \geq m \geq 0$.

Now multiply both sides of (1.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)}$ and integrate with respect to x between -1 and 1. Then, by (2), we get

$$\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m m!}{2}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+1}}\,dx.$$

By successive integration by parts m times, we find that

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+1}}\,dx = \frac{1}{(m+1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m}{(y-x)^2}$$

$$= \frac{2^m}{(m+1)}\int_{-1}^{1}\frac{P_m(x)}{(y-x)^2}\,dx$$

[by using the Rodrigues formula for $P_m(x)$]

$$= -\frac{2^{m+1}}{(m+1)}\,Q_m'(y) \text{ from (1).}$$

We get, finally,

$$\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y) = \frac{(-1)^{m+1}2^m m!}{(m+1)}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,Q_m'(y), \tag{2.2}$$

where $n \geq m \geq 0$.

Using, similarly, (4) with (1.3) and (1.1) respectively yields the following expansions:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\{Q_n^m(y)\}^2 = \frac{(m!)^2(y^2-1)^m}{2(2m+1)}\{(y-1)^{-2m-1} - (y+1)^{-2m-1}\}, \tag{2.3}$$

where m is any non negative integer.

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y)\\ &\quad = \frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{m!}{(m+1)}(y^2-1)^{m/2}\{(y-1)^{-m-1} - (y+1)^{-m-1}\},\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

where m is any non negative integer.

It is interesting to note that putting $m=0$ in either (2.1) or (2.2) or (2.3) or (2.4) yields the same result viz.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n^2(y)=\frac{1}{(y^2-1)}. \tag{2.5}$$

§ 3.

We know that [4, p. 44]

$$x^n=\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]}(2n-4r+1)\,\frac{n(n-1)\dots(2r+2)}{(2n-2r+1)(2n-2r-1)\dots(2r+3)}\,P_{n-2r}(x). \tag{3.1}$$

Differentiate both sides of (1) m times with respect to x (where m is an integer $\leqq n$), multiply by $(1-x^2)^{m/2}$ and use FERRER's definition of $P_n^m(x)$. Then, we get

$$\begin{cases} x^{n-m}(1-x^2)^{m/2} \\ \qquad =(n-m)!\sum\limits_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]}(2n-4r+1)\cdot\dfrac{2^{n-2r}(n-r)!}{r!(2n-2r+1)!}\,P_{n-2r}^m(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

A result equivalent to (3.2) was obtained by GORMLEY [3, p. 150, (11)] by a different method.

Putting $n=p+q$, $m=q$, $x=\cos\vartheta$ in (3.2),

$$\begin{cases} \cos^p\vartheta\sin^q\vartheta \\ \qquad =\dfrac{p!}{(p+q)!}\sum\limits_{r=0}^{[\frac{1}{2}p]}2^{p+q-2r}\,\dfrac{(2p+2q-4r+1)(p+q)!(p+q-r)!}{r!(2p+2q-2r+1)!}\,P_{p+q-2r}^q(\cos\vartheta). \end{cases} \tag{3.3}$$

From (3.2) and the orthogonal property of $P_n^m(x)$,

$$\int_{-1}^{1}x^{n-m}(1-x^2)^{m/2}P_{n-2r}^m(x)\,dx=\frac{2^{n-2r+1}(n-m)!(n-r)!(n-2r+m)!}{r!(2n-2r+1)!(n-2r-m)!}, \tag{3.4}$$

where r is an integer such that $0\leqq r\leqq\frac{1}{2}(n-m)$.

(3.4) can be expressed in the form

$$\int_{-1}^{1}x^l(1-x^2)^{m/2}P_s^m(x)\,dx=\frac{2^{s+1}\,l!\left(\frac{l+s+m}{2}\right)!(s+m)!}{\left(\frac{l+m-s}{2}\right)!(l+m+s+1)!(s-m)!}, \tag{3.5}$$

where l, s, m are positive integers such that $l+s+m$ is even and $m\leqq s\leqq l+m$. In other cases the integral vanishes.

§ 4.

We now evaluate some definite integrals as single finite sums of Legendre functions of the second kind,

Multiply both sides of (3.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)}$ and integrate with respect to x between -1 and 1. Then, by means of (2), we get

$$(4.1)\quad \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)}\,dx = 2(-1)^m (n-m)!\,(y^2-1)^{m/2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}\,(n-r)!}{r!\,(2n-2r+1)!}\, Q_{n-2r}^m(y), \right.$$

where $n \geq m \geq 0$.

Similarly using (3) with (3.2),

$$(4.2)\quad \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+1}}\,dx = \frac{2(n-m)!}{m!} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}\,(n-r)!}{r!\,(2n-2r+1)!} \times \right. \\ \left. \times \frac{(n-2r+m)!}{(n-2r-m)!}\, Q_{n-2r}(y), \right.$$

where $n \geq m \geq 0$.

Differentiating (4.2) s times with respect to y, we have

$$(4.3)\quad \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)^{s+m+1}}\,dx = \frac{2(-1)^s\,(n-m)!}{(s+m)!} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}}{r!} \times \right. \\ \left. \times \frac{(n-r)!\,(n-2r+m)!}{(2n-2r+1)!\,(n-2r-m)!} (y^2-1)^{-\frac{s}{2}}\, Q_{n-2r}^s(y), \right.$$

where $n \geq m \geq 0$ and s is a non negative integer.

$s = m$ is an interesting special case of (4.3).

§ 5.

Differentiate (1.2) r times with respect to y and then multiply both sides by $(y^2-1)^{r/2}$. Then

$$(5.1)\qquad \frac{(1-x^2)^{m/2}(y^2-1)^{r/2}}{(y-x)^{r+m+1}} = \frac{(-1)^r}{(m+r)!} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\,P_n^m(x)\,Q_n^r(y)$$

valid for $n \geq m \geq 0$ and any integer $r \geq -m$.

We get an equivalent result if we differentiate (1.3) s times with respect to x and then multiply both sides by $(1-x^2)^{s/2}$.

Using the orthogonal property of $P_n^m(x)$ with (5.1) we have

$$(5)\qquad Q_n^r(y) = \frac{(-1)^r}{2} \cdot (m+r)!\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(y^2-1)^{r/2} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P_n^m(x)}{(y-x)^{r+m+1}}\,dx$$

valid for $n \geq m \geq 0$ and any integer $r \geq -m$.

When $r=0$, (5) reduces to (3); while when $m=0$ it reduces to (4).

Gormley's result (2) can be deduced by putting $r=-m$ in (5) and making use of [4, p. 109]

$$Q_n^{-m}(y)=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,Q_n^m(y). \tag{5.2}$$

This shows that the results (5) and (5.1) are valid for any integer $r\geqq -m$.

Conversely, (5) can be obtained by differentiating our formula (3) r times with respect to y. But it is not possible to derive (5) from either (2) or (4).

A particular case of (5) that is worthnoting is when $r=m$. Then

$$Q_n^m(y)=\frac{(-1)^m}{2}\cdot(2m)!\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(y^2-1)^{m/2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)}{(y-x)^{2m+1}}\,dx \tag{6}$$

where $n\geqq m\geqq 0$.

Replacing m by s and r by m in (5) and then comparing it with (4) and (2) respectively,

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{s/2}P_n^s(x)}{(y-x)^{s+m+1}}\,dx=\frac{m!\,(n+s)!}{(s+m)!\,(n-s)!}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\,dx \tag{5.3}$$

$$=\frac{(n+s)!\,(y^2-1)^{-m}}{(s+m)!\,(n-s)!}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)}{(y-x)}\,dx\,, \tag{5.4}$$

where $n\geqq s\geqq 0$, $n\geqq m\geqq 0$.

§ 6.

Lemma 1.

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^s}\,dx=\frac{2^{2m+1}\,m!\,m!}{(2m+1)!}\,(y+1)^{-s}F\left\{s,m+1;\,2m+2;\,\frac{2}{(y+1)}\right\}. \tag{6.1}$$

This can be easily proved by making the substitution $x=2t-1$ in the left hand side integral and then using [1, p. 4]

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt=\frac{\Gamma b\,\Gamma(c-b)}{\Gamma c}F(a,b;c;z)$$

which is convergent when $R(c)>R(b)>0$, $|z|<1$.

Lemma 2.

$$\left\{\begin{aligned}Q_n^m(y)&=\frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{y+1}\right)^{n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{m/2}\times\\&\quad\times F\left(n+m+1;\,n+1;\,2n+2;\,\frac{2}{1+y}\right).\end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

This can be deduced from a known result [4, p. 203, (29)].

§ 7.

Using (5) with (5.1),

$$\frac{2}{\{(r+m)!\}^2}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)(y^2-1)^{-r}\{Q_n^r(y)\}^2=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{2r+2m+2}}\,dx,$$

where $n\geqq m\geqq 0$, $r\geqq -m$.

Now, for the right hand side integral, using first, Lemma 1 and then Lemma 2, we get

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\{Q_n^r(y)\}^2\\&\quad=\frac{2^{2m}}{(2m+1)!}(m!)^2\{(r+m)!\}^2\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^r\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{2r+2m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.1a}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}2^m\{(r+m)!\}^2m!}{(2r+2m+1)!}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{2r+m+1}(y)\tag{7.1b}$$

both valid for $n\geqq m\geqq 0$, $r\geqq -m$.

Using, similarly, (6) with (5.1) we have

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^m(y)\,Q_n^r(y)\\&\quad=(-1)^{r+m}\frac{2^{2m}}{(2m+1)}(m!)^2(r+m)!\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{r+m}{2}}\cdot\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{r+3m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.2a}$$

$$=(-1)^{m+1}2^m\frac{m!(2m)!(r+m)!}{(r+3m+1)!}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{r+2m+1}(y)\tag{7.2b}$$

both valid for $n\geqq m\geqq 0$, $r\geqq -m$.

Using, similarly, (5.1) with each of (2) and (3) respectively we have

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n^m(y)\,Q_n^r(y)\\&\quad=(-1)^{r+m}2^{2m}\frac{(r+m)!\,(m!)^2}{(2m+1)!}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{r-m}{2}}\cdot\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{r+m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.3a}$$

$$=(-1)^{m+1}2^m\frac{m!}{(r+m+1)}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{r+1}(y),\tag{7.3b}$$

where $n\geqq m\geqq 0$, $r\geqq -m$.

$$7.4\text{a}) \quad \begin{cases} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,Q_n(y)\,Q_n^r(y) \\ \qquad = (-1)^r\,2^{2m}\,\frac{(m!)^3\,(r+m)!}{(2m+1)!}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{r/2}\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times \\ \qquad\qquad \times F\left\{r+2m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\} \end{cases}$$

$$7.4\text{b}) \quad = (-1)^{m+1}\,2^m\,\frac{(m!)^2\,(r+m)!}{(r+2m+1)!}\,(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}\,Q_m^{r+m+1}(y),$$

where $n \geq m \geq 0$, $r \geq -m$.

§ 8. Particular Cases.

Putting $r=m$ in (7.1b) or (7.2b) we can evaluate

$$8.1) \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2$$

and putting $r=-m$ in (7.1b) or (7.3b) and using (5.2) we can find the value of

$$8.2) \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2.$$

The substitution $r=m$ in (7.4b) gives

$$8.3) \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y).$$

Again, $r=0$ in (7.1b) or (7.4b) yields (2.1) and hence we get

$$8.4) \quad Q_m^{m+1}(y) = (-1)^{m+1}\,2^m\,m!\,(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}$$

which can also be verified directly by using the expansion for $Q_m(y)$.

Now, putting $r=-m$ in (7.2b) or $r=m$ in (7.3b) and using (8.4) we can get

$$8.5) \quad \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2.$$

Finally, (8.5) subtracted from (2.3) yields the finite sum

$$8.6) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{m-1} (2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2 \\ \qquad = \frac{(m!)^2}{2(2m+1)}\,(y^2-1)^{-m-1}\left[(y+1)^{2m+1}-(y-1)^{2m+1}-2^{2m+1}\right], \end{cases}$$

where $m \geq 1$.

§ 9.

The results of this paper hold not only for real values of y greater than unity, but also for all values of y which are not real and not between $+1$ and -1. So, formulae for the associated Legendre function of the first kind viz. P_n^m can be obtained by using in the results of this paper WHIPPLE's transformation [4, p. 245]

$$e^{-m\pi i}\, Q_n^m(\cosh\alpha) = \Pi(n+m)\,(\tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{cosech}\,\alpha)^{\frac{1}{2}}\, P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\coth\alpha),$$

where $R(\cosh\alpha) > 0$, or BATEMAN's form [2, p. 379] of WHIPPLE's relation

$$e^{-m\pi i}\, Q_n^m(i\cot\vartheta) = i^{-n-1}\Pi(n+m)\,(\tfrac{1}{2}\pi\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}\, P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta).$$

Thus, from (5), we get

$$(9.1)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{-r-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\coth\alpha) = {} & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(r+m)!}{(r+n)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(\sinh\alpha)^{r+\frac{1}{2}}\times \\ & \times\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}\,P_n^m(x)}{(\cosh\alpha - x)^{r+m+1}}\,dx, \end{aligned}\right.$$

where $R(\cosh\alpha) > 0$ and n, m, r are integers such that $n \geqq m \geqq 0$, $r \geqq -m$. And

$$(9.2)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{-r-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) = {} & \frac{i^{n+r+1}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(r+m)!}{(r+n)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\mathrm{cosec}^{r+\frac{1}{2}}\vartheta\times \\ & \times\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}\,P_n^m(x)}{(i\cot\vartheta - x)^{r+m+1}}\,dx, \end{aligned}\right.$$

where n, m, r are integers such that $n \geqq m \geqq 0$, $r \geqq -m$.

References.

[1] BAILEY, W. N.: Generalised Hypergeometric Series. 1935. — [2] BATEMAN: Partial Differential Equations. 1932. — [3] GORMLEY, P. G.: J. London Math. Soc. **9**, 149—152 (1934). — [4] HOBSON, E. W.: Spherical and Ellipsoidal Harmonics. 1931.

Dept. of Math. College of Science, Nagpur (India).

(Eingegangen am 9. Oktober 1953.)

Lorenzen, P.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 61—65 (1954)

Über die Korrespondenzen einer Struktur.

Von
Paul Lorenzen.

Um einen kurzen Ausdruck zur Verfügung zu haben, werde eine Menge M mit einem System F von (endlichstelligen) Operationen $f_1, f_2, \ldots$ in M ein „Gebilde" genannt. Durch das System F ist der Menge M eine „Struktur" aufgeprägt; mit anderen Worten: Das Gebilde (M, F) stellt eine Struktur dar. Genau dann, wenn zwei Gebilde isomorph sind, stellen sie dieselbe Struktur dar.

Eine zweistellige Relation ϱ in M heiße eine „Korrespondenz" des Gebildes (M, F), wenn ϱ isoton ist bezüglich aller Operationen f von F, d.h. wenn für alle Elemente $x, y, \ldots$ von M gilt[1])

$$x_1 \varrho\, y_1 \mathbin{\&} x_2 \varrho\, y_2 \mathbin{\&} \ldots \to f(x_1, x_2, \ldots)\, \varrho\, f(y_1, y_2, \ldots).$$

Nach dieser Definition gehören zu den Korrespondenzen z.B. die Kongruenzrelationen eines Gebildes, aber auch die Automorphismen und die Endomorphismen. Der Menge der Korrespondenzen $\varrho, \sigma, \ldots$ eines Gebildes werde eine Struktur aufgeprägt, indem die folgenden Operationen definiert werden:

$$x\, \varrho \wedge \sigma\, y \leftrightarrow x\, \varrho\, y \mathbin{\&} x\, \sigma\, y \qquad \text{(Konjunktion)}$$

$$x\, \varrho\, \sigma\, y \leftrightarrow \bigvee_z x\, \varrho\, z \mathbin{\&} z\, \sigma\, y \qquad \text{(Multiplikation)}$$

$$x\, \breve{\varrho}\, y \leftrightarrow y\, \varrho\, x \qquad \text{(Konversion).}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Operationen von Korrespondenzen stets wieder zu Korrespondenzen führen. Die Struktur des so definierten Korrespondenzengebildes hängt nur von der Struktur des vorgegebenen Gebildes ab. Für jede Struktur ist also eine Korrespondenzenstruktur definiert.

Die Betrachtung der Korrespondenzenstruktur ergibt einen einfachen Zugang zu den allgemeinen Strukturtheoremen der Algebra (z.B. dem Verfeinerungstheorem). Es ist hierbei zu beachten, daß die Korrespondenzenstruktur nicht zum „Typ" der Verbände gehört. Es ist zwar ein Konjunktion $\wedge$ vorhanden (es liegt ein Halbverband vor), aber an Stelle einer Disjunktion ist nur die im allgemeinen nichtkommutative Multiplikation vorhanden. Erst bei Beschränkung auf Strukturen mit vertauschbaren Kongruenzrelationen ist die Kongruenzenstruktur ein (modularer) Verband. Diese Beschränkung ist aber nicht erforderlich, da kein sachlicher Grund vorliegt, die allgemeinen Strukturtheoreme als Spezialisierungen verbandstheoretischer Sätze zu gewinnen.

[1]) Zur Bildung von Aussagen werden die folgenden logischen Partikel: $\mathbin{\&}$ (und), $\vee$ (oder), $\bigwedge_x$ (für alle x), $\bigvee_x$ (für manche x) gebraucht. Die logische Implikation bzw. Äquivalenz wird durch $\to$ bzw. $\leftrightarrow$ ausgedrückt.

Fragt man nach den einfachsten Sätzen, die für jede Korrespondenzenstruktur gelten, so liegt es nahe, zur bequemen Formulierung zunächst eine Relation $\prec$ einzuführen durch

$$\varrho \prec \sigma \leftrightarrow \varrho \wedge \sigma = \varrho .$$

Dann bietet sich unmittelbar das folgende Satzsystem an:

(I.1) $\varrho \prec \varrho$

(I.2) $\varrho \prec \sigma \mathbin{\mathbf{\wedge}} \sigma \prec \tau \rightarrow \varrho \prec \tau$

(I.3) $\varrho \prec \sigma \mathbin{\mathbf{\wedge}} \sigma \prec \varrho \rightarrow \varrho = \sigma$

(II) $\varrho \prec \sigma \mathbin{\mathbf{\wedge}} \varrho \prec \tau \leftrightarrow \varrho \prec \sigma \wedge \tau$

(III.1) $\varrho (\sigma \tau) = (\varrho \sigma) \tau$

(III.2) $\varrho_1 \prec \sigma_1 \mathbin{\mathbf{\wedge}} \varrho_2 \prec \sigma_2 \rightarrow \varrho_1 \varrho_2 \prec \sigma_1 \sigma_2$

(IV.1) $\breve{\breve{\varrho}} = \varrho$

(IV.2) $\widetilde{\varrho \sigma} = \tilde{\sigma} \tilde{\varrho}$

(IV.3) $\widetilde{\varrho \wedge \sigma} = \tilde{\varrho} \wedge \tilde{\sigma}$

(V) $\varrho \sigma \wedge \tau \prec (\varrho \wedge \tau \tilde{\sigma}) (\sigma \wedge \tilde{\varrho} \tau)$.

Die Gültigkeit dieser Sätze für zweistellige Relationen darf als bekannt vorausgesetzt werden. (V) findet sich meines Wissens zuerst als „relation de Dedekind" bei RIGUET[2]) und ist unmittelbar nachzuprüfen:

$$\begin{aligned} x \varrho \sigma \wedge \tau y &\rightarrow \mathbf{V}_z \, x \varrho z \mathbin{\mathbf{\wedge}} z \sigma y \mathbin{\mathbf{\wedge}} x \tau y \\ &\rightarrow \mathbf{V}_z \, x \varrho z \mathbin{\mathbf{\wedge}} x \tau y \mathbin{\mathbf{\wedge}} y \tilde{\sigma} z \mathbin{\mathbf{\wedge}} z \sigma y \mathbin{\mathbf{\wedge}} z \tilde{\varrho} x \mathbin{\mathbf{\wedge}} x \tau y \\ &\rightarrow \mathbf{V}_z \, x \varrho \wedge \tau \tilde{\sigma} z \mathbin{\mathbf{\wedge}} z \sigma \wedge \tilde{\varrho} \tau y \\ &\rightarrow \quad x (\varrho \wedge \tau \tilde{\sigma}) (\sigma \wedge \tilde{\varrho} \tau) y . \end{aligned}$$

Da die Gleichheitsrelation ε (d.h. $x \varepsilon y \leftrightarrow x = y$) stets eine Korrespondenz ist, kann das obige „Axiomensystem" noch mit ε als nullstelliger Operation erweitert werden durch

(III.3) $\varepsilon \varrho = \varrho$.

Aus $\varepsilon \tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}$ folgt $\varrho \tilde{\varepsilon} = \varrho$, also gilt $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Der durch (I) bis (V) definierte Strukturtyp möge kurz „Bund" heißen. Ich vermute, daß jeder Bund [d.h. jedes Gebilde, das ein Modell von (I) bis (V) ist] isomorph zu einem (im allgemeinen nicht dem vollen) Korrespondenzenbund eines geeigneten Gebildes ist. Diese Vermutung stützt sich darauf, daß die Bundaxiome ausreichen, um die bekannten Sätze über beliebige Korrespondenzenbünde zu beweisen.

Als Beispiel werde das Verfeinerungstheorem behandelt. Im folgenden seien also $\varrho, \sigma, \ldots$ nicht mehr als Korrespondenzen eines Gebildes vorausgesetzt, sondern nur als Elemente eines Bundes.

[2]) RIGUET, J.: Relations binaires, fermetures et correspondances de Galois. Bull. Soc. Math. France **76**, 114—154 (1948).

Definition 1. *ϱ heißt eine Kongruenz, wenn*

(1) $$\varepsilon < \varrho,$$

(2) $$\varrho\,\tilde{\varrho} < \varrho.$$

Im folgenden seien α, β und γ stets Kongruenzen, ϱ, σ und τ beliebige Elemente.

Satz 1.

(3) $$\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$$

(4) $$\alpha \wedge \beta \qquad \textit{ist eine Kongruenz}$$

(5) $$\alpha\beta = \beta\alpha \leftrightarrow \alpha\beta \qquad \textit{ist eine Kongruenz}$$

(6.1) $$\varrho < \alpha \rightarrow \alpha \wedge \varrho\sigma = \varrho(\alpha \wedge \sigma)$$

(6.2) $$\varrho < \alpha \rightarrow \alpha \wedge \sigma\varrho = (\alpha \wedge \sigma)\varrho$$

(7.1) $$\varrho\alpha \wedge \sigma\alpha = (\varrho\alpha \wedge \sigma)\alpha$$

(7.2) $$\alpha\varrho \wedge \alpha\sigma = \alpha(\alpha\varrho \wedge \sigma).$$

Beweis. (3) bis (5) sind trivial, (6) bis (7) ergeben sich aus (V) z.B.

$$\varrho < \alpha \rightarrow \tilde{\varrho} < \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\varrho}\alpha < \tilde{\alpha}\alpha = \alpha$$

also (6.1) $$\alpha \wedge \varrho\sigma < (\alpha\tilde{\sigma} \wedge \varrho)(\tilde{\sigma}\alpha \wedge \sigma) < \varrho(\alpha \wedge \sigma)$$

oder (7.1) $$\varrho\alpha \wedge \sigma\alpha < (\varrho\alpha\tilde{\alpha} \wedge \sigma)(\tilde{\sigma}\varrho\alpha \wedge \alpha) < (\varrho\alpha \wedge \sigma)\alpha.$$

Definition 2. *β heißt normal bezüglich α, wenn*

(8) $$\bigwedge_{\varrho} \varrho < \alpha \rightarrow \varrho\beta = \beta\varrho.$$

Satz 2. *Ist γ normal bezüglich α, dann ist γ normal bezüglich $\alpha\gamma$.*

Beweis. Es gilt $\alpha\gamma = \gamma\alpha$. Für $\varrho < \alpha\gamma$ gilt zunächst $\varrho\gamma < \alpha\gamma$, mit (7) also

$$\varrho\gamma = \varrho\gamma \wedge \alpha\gamma = (\varrho\gamma \wedge \alpha)\gamma = (\varrho\gamma \wedge \alpha)\gamma\gamma = \gamma(\varrho\gamma \wedge \alpha)\gamma = \gamma\varrho\gamma.$$

Ebenso folgt aber $\gamma\varrho = \gamma\varrho\gamma$, also $\varrho\gamma = \gamma\varrho$.

Satz 3. *Gilt $\beta < \alpha$ und sind β und γ normal bezüglich α, dann ist $\beta\gamma$ normal bezüglich $\alpha\gamma$.*

Beweis. Es gilt außer $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ auch $\beta\gamma = \gamma\beta$. Für $\varrho < \alpha\gamma$ gilt nach Satz 2:

$$\begin{aligned}\varrho\beta\gamma &= \varrho\gamma\beta = \gamma\varrho\beta = (\gamma\varrho \wedge \gamma\alpha)\beta = \gamma(\gamma\varrho \wedge \alpha)\beta \\ &= \gamma\beta(\gamma\varrho \wedge \alpha) = \beta\gamma(\gamma\varrho \wedge \alpha) = \beta(\gamma\varrho \wedge \gamma\alpha) = \beta\gamma\varrho.\end{aligned}$$

Satz 4. *Gilt $\beta < \alpha$ und ist β normal bezüglich α, dann ist $\beta \wedge \gamma$ normal bezüglich $\alpha \wedge \gamma$.*

Beweis. Aus $\varrho < \alpha \wedge \gamma$ folgt $\varrho < \alpha$, also $\varrho\beta = \beta\varrho$. Ferner folgt $\varrho < \gamma$ und daher nach (6)

$$\varrho(\beta \wedge \gamma) = \varrho\beta \wedge \gamma = \beta\varrho \wedge \gamma = (\beta \wedge \gamma)\varrho.$$

Es ist bekannt, wie aus Satz 1, Satz 3 und Satz 4 das Verfeinerungstheorem folgt[3]). Man benutzt dazu

Definition 3. *Ein Paar β_1, β_2 heißt von unten perspektiv zu α_1, α_2, wenn gilt:*

$$\alpha_1 = \alpha_2 \beta_1 \tag{8}$$

$$\alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2. \tag{9}$$

Zwei Paare α_1, α_2 und α_1', α_2' heißen von unten projektiv, wenn es ein Paar β_1, β_2 gibt, das zu beiden von unten perspektiv ist.

Die ZASSENHAUSschen Verfeinerungen mit den Gliedern

$$\alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu \wedge \beta_\nu) \quad \text{und} \quad (\alpha_\mu \wedge \beta_\nu)\beta_{\nu-1}$$

zu zwei normalen Ketten $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ und $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$ (es sei also $\alpha_{\mu-1}$ normal bezüglich α_μ und $\beta_{\nu-1}$ normal bezüglich β_ν) liefern dann das

Verfeinerungstheorem. *Zwei gleichendige, normale Ketten haben normale, von unten projektive Verfeinerungen.*

Als weiteres Beispiel für die Tragweite der Bundaxiome sei noch das NOETHERsche Ersetzungstheorem angeführt. Dazu werde ein Satz über die Perspektivität vorausgeschickt:

Satz 5. *Ist β_1, β_2 von unten perspektiv zu α_1, α_2, dann gilt*

$$\alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \rightarrow \alpha_2(\alpha \wedge \beta_1) = \alpha \tag{10}$$

$$\beta_2 < \beta < \beta_1 \rightarrow \alpha_2 \beta \wedge \beta_1 = \beta \tag{11}$$

$$\beta_2 < \beta < \beta_1 \wedge \beta_2 < \beta' < \beta_1 \rightarrow \alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' = \alpha_2(\beta \wedge \beta'). \tag{12}$$

Beweis. (10) und (11) folgen aus (6):

$$\alpha_2 < \alpha \rightarrow \alpha_2(\alpha \wedge \beta_1) = \alpha \wedge \alpha_2\beta_1 = \alpha \wedge \alpha_1 = \alpha$$

$$\beta < \beta_1 \rightarrow \alpha_2 \beta \wedge \beta_1 = (\alpha_2 \wedge \beta_1)\beta = \beta_2\beta = \beta.$$

(12) folgt aus (10) und (11) wegen $\alpha_2 < \alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' < \alpha_1$, also

$$\alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' = \alpha_2(\alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' \wedge \beta_1) = \alpha_2(\beta \wedge \beta').$$

Definition 4. *Eine Kongruenz α heißt irreduzibel, wenn gilt:*

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow \alpha = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_2.$$

Ersetzungstheorem. *In zwei Darstellungen von α:*

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha_1' \wedge \alpha_2' \wedge \ldots \wedge \alpha_n'$$

ist jedes irreduzible α_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$, das normal bezüglich $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ ist, ersetzbar durch ein geeignetes α_ν' $(\nu = 1, \ldots, n)$, d.h.

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_\nu' \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m.$$

[3]) Vgl. die Literatur, die in G. BIRKHOFF, Lattice theory, Kap. IV, New York 1948, angegeben ist.

Beweis. Man setze

$$\beta_\mu = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$$
$$\gamma_{\mu\nu} = \beta_\mu \wedge \alpha_\nu .$$

Es ist β_μ, α von unten perspektiv zu $\alpha_\mu \beta_\mu, \alpha_\mu$ und für jedes ν gilt:

$$\alpha < \gamma_{\mu\nu} < \beta_\mu .$$

Nach (12) gilt daher wegen $\alpha = \gamma_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{\mu n}$:

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu \alpha = \alpha_\mu \gamma_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge \alpha_\mu \gamma_{\mu n} .$$

Ist α_μ irreduzibel und normal bezüglich β_μ, dann sind $\alpha_\mu \gamma_{\mu\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ Kongruenzen und es gibt also ein ν mit $\alpha_\mu = \alpha_\mu \gamma_{\mu\nu}$. Hieraus folgt aber

$$\alpha = \alpha_\mu \wedge \beta_\mu = \alpha_\mu \gamma_{\mu\nu} \wedge \beta_\mu = \gamma_{\mu\nu} .$$

Die Beispiele zeigen, daß die Multiplikation eines Bundes die verbandstheoretische Disjunktion in den üblichen Beweisen gut ersetzen kann. Die fehlende Kommutativität erfordert nur gewisse Normalitätsvoraussetzungen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 3. November 1953.)

GRAEUB, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 66—78 (1954)

Über die schwächste Uniformisierende.

Von
W. GRAEUB.

Eine RIEMANNsche Fläche kann erklärt werden

1. als topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen[1]),

2. als der Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes der z-Kugel[2]).

Jede RIEMANNsche Fläche (2) ist eine topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen; die Punkte der Fläche sind die analytischen Elemente und die Umgebung eines Punktes wird von den unmittelbaren Fortsetzungen des entsprechenden Funktionselementes gebildet.

Umgekehrt erhebt sich die Frage, ob man eine gegebene RIEMANNsche Fläche (1) als den Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes darstellen kann. *In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß dies stets der Fall ist.* Dabei wird es darauf ankommen, der gegebenen Fläche R ein analytisches Gebilde zuzuordnen, so daß die Fläche R als die „schwächste Uniformisierende" derjenigen mehrdeutigen Relation $z \leftrightarrow z'$ erscheint, die durch das analytische Gebilde zwischen der z- und der z'-Kugel hergestellt wird.

1. RIEMANNsche Flächen. Im folgenden wird die Definition (1) zugrunde gelegt. Eine RIEMANNsche Fläche R ist zunächst ein HAUSDORFFscher Raum, in dem jeder Punkt P eine *Parameterumgebung* K_P besitzt, d.h. eine Umgebung, die zu einer Kreisscheibe der z-Ebene, dem *Parameterkreis* $K_{P,z}$, homöomorph ist. Die topologische Abbildung ϱ_P: $K_P \to K_{P,z}$ nennen wir die *Parameterabbildung*. Es ist keine Einschränkung, den Parameterkreis als den Einheitskreis $|z| < 1$ anzunehmen. Sind K_P und $K_{P'}$ zwei benachbarte (d.h. nicht punktfremde) Parameterumgebungen zweier Punkte P bzw. P', so entspricht dem Durchschnitt $D = K_P K_{P'}$ im Parameterkreis $|z| < 1$ bzw. $|z'| < 1$ eine offene Menge D_z bzw. $D_{z'}$ und $\varrho_{P'} \varrho_P^{-1}$ ist eine topologische Abbildung von D_z auf $D_{z'}$, die *Nachbarrelation* der Umgebungen K_P und $K_{P'}$.

Unter einer RIEMANN*schen Fläche* versteht man eine topologische Fläche, bei der alle Nachbarrelationen direkt konforme Abbildungen sind. Eine RIEMANNsche Fläche, betrachtet als topologischer Raum, besitzt eine abzählbare Basis, oder, was damit gleichbedeutend ist, sie läßt sich durch *abzählbar viele* Parameterumgebungen überdecken[3]).

2. Überlagerungsflächen. Es seien $\tilde{R}$ und R zwei topologische Flächen und σ sei eine eindeutige und stetige Abbildung von $\tilde{R}$ auf R, so daß jeder

[1]) Vgl. NEVANLINNA, R.: Uniformisierung, Springer 1953, Definition 2.22. Dieses Buch wird im folgenden mit N. zitiert.

[2]) Vgl. WEYL, H.: Die Idee der RIEMANNschen Fläche, Teubner 1923, Kap. I, §§ 6, 7.

[3]) Vgl. N. Kap. IV, § 3.

Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ eine Umgebung besitzt, welche topologisch abgebildet wird. Dann heißt $\tilde{R}$ eine *unverzweigte Überlagerungsfläche* von R und σ die *Spurabbildung*. Jede Umgebung des Punktes $\tilde{P}$, in der die Abbildung σ topologisch ist, soll eine *ausgezeichnete Umgebung* dieses Punktes genannt werden.

Die Fläche $\tilde{R}$ heißt eine *verzweigte Überlagerungsfläche* von R, wenn die lokale Eineindeutigkeit der Abbildung σ in gewissen, isoliert liegenden, Punkten $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ verletzt und durch die folgende ersetzt ist: Der Punkt $\tilde{P}$ besitzt eine Parameterumgebung $U_{\tilde{P}}$, so daß $\tilde{P}$ als einziger Punkt von $U_{\tilde{P}}$ in den Punkt $P = \sigma\tilde{P}$ übergeführt wird, während sonst je k (k feste Zahl) Punkte von $U_{\tilde{P}}$ in denselben Punkt von R übergehen. Ein solcher Punkt $\tilde{P}$ heißt ein *Verzweigungspunkt* und $k-1$ seine *Ordnung*.

3. Mehrdeutige Beziehung zwischen zwei RIEMANNschen Flächen. Zwischen zwei RIEMANNschen Flächen R und R' sei eine (in beiden Richtungen) mehrdeutige analytische Beziehung gegeben; das soll folgendes bedeuten: Es seien gewisse Punktepaare P, P' ($P \in R$, $P' \in R'$) einander zugeordnet, so daß jeder Punkt von R bzw. R' in mindestens einem Paar auftritt, und diese Zuordnung besitze die Eigenschaften:

A. Ist P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte, so gibt es endlich oder abzählbar viele Paare von Parameterumgebungen U_P, $U_{P'}$ von P bzw. P', so daß die Punkte von U_P und $U_{P'}$ einander zugeordnet sind, und zwar entweder mittels einer eineindeutigen konformen lokalen Abbildung λ_P oder mittels einer verzweigten lokalen Abbildung λ_P, die sich in geeigneten lokalen Parametern z und z' in der Form

$$z = t^m, \quad z' = t^n \qquad (m, n \text{ ganz})$$

schreiben läßt. Dabei seien die Parameterkreise die Einheitskreise $|z| < 1$ bzw. $|z'| < 1$ und den Punkten P bzw. P' entspreche der Punkt $z = 0$ bzw. $z' = 0$.

B. Es sei λ_P eine zum Punkte P gehörige lokale Abbildung und Q sei ein Punkt der zugehörigen Parameterumgebung U_P. Dann gibt es unter den zum Punkte Q gehörigen lokalen Abbildungen eine Abbildung λ_Q, so daß $\lambda_Q = \lambda_P$ im Durchschnitt $U_P U_Q$.

C. Zu je zwei unverzweigten Abbildungen λ_A und λ_B gibt es auf R einen von A nach B führenden Weg $P(t)$ ($0 \leqq t \leqq 1$) und eine Belegung des Weges mit unverzweigten lokalen Abbildungen λ_t, so daß $\lambda_0 = \lambda_A$ und $\lambda_1 = \lambda_B$. Die Bezeichnung „Belegung" deutet hier an, daß zwei Abbildungen λ_t und $\lambda_{t'}$ unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind, falls t' hinreichend nahe an t liegt.

Aus der Bedingung B folgt, daß die Punkte von R, zu denen nur verzweigte Abbildungen gehören, isoliert liegen. Denn ist P ein beliebiger Punkt von R und λ_P eine zugehörige lokale Abbildung, definiert in der Umgebung U_P, so ist diese in jedem von P verschiedenen Punkt von U_P unverzweigt, gleichgültig ob sie in P unverzweigt ist oder nicht. Ist Q ein beliebiger Punkt von U_P, so ist λ_P nach Bedingung B eine der zum Punkte Q gehörigen lokalen

Abbildungen und diese ist in Q unverzweigt. Zu jedem (von P verschiedenen) Punkt der Umgebung U_P gehört also mindestens eine unverzweigte lokale Abbildung.

Ein analytisches Gebilde auf der z-Kugel bestimmt eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, welche den drei obigen Bedingungen genügt. Dabei ist R das bei der Fortsetzung überdeckte Gebiet und R' das Bildgebiet.

4. Die Eigenschaft *D*. Wir werden in 10. eine mehrdeutige Relation betrachten, die zusätzlich folgender Bedingung D genügt:

D. Zu je zwei einander zugeordneten Punkten P und P' gibt es Parameterumgebungen V_P und $V_{P'}$, so daß sich je zwei einander zugeordnete Punkte von V_P und $V_{P'}$ mittels einer *zum Punkte P gehörigen* lokalen Abbildung entsprechen.

Diese Bedingung ist bei einem analytischen Gebilde im allgemeinen nicht erfüllt, wie man am Beispiel

$$z' = e^{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$$

für die Punkte $z = 1$ und $z' = e^{\frac{1}{2}}$ sieht.

5. Uniformisierung. Es sei eine mehrdeutige Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gegeben. Eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}$ *uniformisiert* die Beziehung $R \leftrightarrow R'$, wenn $\tilde{R}$ eine (im allgemeinen verzweigte) Überlagerungsfläche von sowohl R als auch R' ist und die Spurabbildungen $\sigma: \tilde{R} \to R$, $\sigma': \tilde{R} \to R'$ folgendermaßen mit der Relation $R \leftrightarrow R'$ zusammenhängen:

1. Für jeden Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ sind die Punkte $P = \sigma\tilde{P}$ und $P' = \sigma'\tilde{P}$ einander mittels der Beziehung $R \leftrightarrow R'$ zugeordnet und man erhält auf diese Art alle Paare einander zugeordneter Punkte.

2. Ist $U_{\tilde{P}}$ eine zu $\tilde{P}$ gehörige ausgezeichnete Umgebung (bezüglich beider Spurabbildungen), so ist $\sigma'\sigma^{-1}$ eine zum Spurpunkt P gehörige (eindeutige oder verzweigte) lokale Abbildung λ_P, definiert in der Spurumgebung U_P von $U_{\tilde{P}}$. Umgekehrt erhält man auf diese Art alle zum Punkte P gehörigen lokalen Abbildungen λ_P entsprechend den über P liegenden Punkten.

Aus dieser Definition folgt, daß mit einer uniformisierenden Fläche $\tilde{R}$ auch jede Überlagerung von $\tilde{R}$ eine solche ist.

Zu einer gegebenen mehrdeutigen Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gibt es stets eine uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$[4]). Sie wird als Raum der lokalen Abbildungen konstruiert. Dabei definieren zwei lokale Abbildungen genau dann denselben Punkt von $\tilde{R}_1$, wenn sie zu demselben Punkt P gehören und unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind. Die Spurabbildungen σ bzw. σ' sind durch die Zuordnungen $\lambda_P \to P$ bzw. $\lambda_P \to \lambda_P(P)$ gegeben. Die so konstruierte uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$ ist die *schwächste* Uniformisierende der Beziehung $R \leftrightarrow R'$, d. h. jede uniformisierende Fläche ist eine Überlagerung von $\tilde{R}_1$[4]).

[4]) Vgl. N. Kap. VIII, § 4.

6. Relationen mit der Eigenschaft *D*. Erfüllt die mehrdeutige Relation $R \leftrightarrow R'$ überdies die Bedingung D, so besitzt die schwächste Uniformisierende noch folgende Eigenschaft:

3. Es sei P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte und $\tilde{P}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seien die gleichzeitig über P und P' liegenden Punkte von $\tilde{R}_1$. Dann gibt es Umgebungen V_P, $V_{P'}$ und $V_{\tilde{P}_\nu}$, so daß alle Punkte von $\tilde{R}_1$, deren Spurpunkte bezüglich σ bzw. σ' in V_P bzw. $V_{P'}$ liegen, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{P}_\nu}$ angehören.

7. Teilgebiete der Zahlenkugeln. Wir betrachten fortan den Fall, daß R bzw. R' ein Gebiet auf der x-Kugel bzw. x'-Kugel ist. Wie schon erwähnt, bestimmt jedes analytische Gebilde eine mehrdeutige Relation $x \leftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C und definiert damit eine Riemannsche Fläche $\tilde{R}_1$ als die schwächste Uniformisierende dieser Beziehung.

Es sei jetzt umgekehrt eine Riemannsche Fläche $\tilde{R}$ gegeben. Gesucht ist eine mehrdeutige Beziehung $x \leftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C, deren schwächste Uniformisierende zur Fläche $\tilde{R}$ konform äquivalent ist.

8. Formulierung als Abbildungsaufgabe. Wir betrachten auf einer gegebenen Riemannschen Fläche $\tilde{R}$ zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen $f(\tilde{z})$ und $g(\tilde{z})$. Mittels der Funktion f bzw. g wird die Fläche $\tilde{R}$ auf ein Teilgebiet der x- bzw. x'-Kugel abgebildet. Ordnet man für jeden Punkt $\tilde{z}$ die beiden Bildpunkte $x = f(\tilde{z})$ und $x' = g(\tilde{z})$ einander zu, so ist damit eine mehrdeutige Beziehung $x \leftrightarrow x'$ definiert, welche den Bedingungen A, B, C genügt. Diese Beziehung wird durch die Fläche $\tilde{R}$ uniformisiert. Dabei wird die Fläche $\tilde{R}$ im allgemeinen nicht die *schwächste* Uniformisierende $\tilde{R}_1$ der obigen Beziehung sein, sondern diese überlagern; und zwar wird die Spurabbildung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ auf folgende Art erklärt: Es sei $\tilde{a}$ ein Punkt der Fläche $\tilde{R}$ und $a = f(\tilde{a})$ bzw. $a' = g(\tilde{a})$ seien seine beiden Bildpunkte auf R bzw. R'. Ist dann U_a^- eine ausgezeichnete Umgebung von $\tilde{a}$, so sind die Spurumgebungen U_a und $U_{a'}$ nach Bedingung 2. von 5. mittels der lokalen Abbildung $\lambda_a = g f^{-1}$ aufeinander bezogen. Die lokale Abbildung λ_a repräsentiert einen Punkt der Fläche $\tilde{R}_1$; dieser sei der Bildpunkt von $\tilde{a}$. Die so erklärte Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist dann eine Spurabbildung von $\tilde{R}$ auf $\tilde{R}_1$[4]).

Wir betrachten jetzt andererseits die Abbildung φ der Fläche $\tilde{R}$ in das topologische Produkt der x- und der x'-Kugel, welche durch die Zuordnung $x = f(\tilde{z})$, $x' = g(\tilde{z})$ gegeben ist. Dann besteht folgender Zusammenhang:

Die oben erklärte Spurabbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist genau dann eineindeutig, wenn die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, d.h., sind $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei verschiedene Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$, so gibt es Umgebungen $U_{\tilde{a}_1}$ und $U_{\tilde{a}_2}$, deren Bilder nur den Punkt $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$ gemeinsam haben.

Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, die Abbildung φ sei in diesem Sinn eineindeutig und schließen daraus auf die Eineindeutigkeit der Abbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$.

[4]) Vgl. N. Kap. VIII, § 4.

Es seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei Punkte von $\tilde{R}$. Der Spurpunkt von $\tilde{a}_1$ auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ist eine lokale Abbildung λ_{a_1}, welche zum Punkte $a_1 = f(\tilde{a}_1)$ gehört und dadurch charakterisiert ist, daß

$$\lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}) \tag{1}$$

in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$. Ebenso ist der Bildpunkt von $\tilde{a}_2$ eine lokale Abbildung λ'_{a_2} zum Punkte $a_2 = f(\tilde{a}_2)$ und es gilt in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$\lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}). \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen, daß aus der Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ die Gleichheit $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ folgt. Zunächst besagt die Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$, daß diese beiden Abbildungen zu demselben Punkt von R gehören, also $a_1 = a_2 = a$; es ist also $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, d.h. die Funktion $f(\tilde{z})$ nimmt in den Punkten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ denselben Wert an. Es gibt daher zu jedem hinreichend nahe an $\tilde{a}_1$ liegenden Punkt $\tilde{z}_1$ von $U_{\tilde{a}_1}$ einen Punkt $\tilde{z}_2$ in $U_{\tilde{a}_2}$, so daß $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2)$. Für die Punkte $\tilde{z}_1$ und $\tilde{z}_2$ gilt dann wegen $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ nach (1) und (2) auch $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2)$. Es ist also $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$ und dies ist nach unserer Voraussetzung über die Abbildung φ nur so möglich, daß $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Die Zuordnung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ ist somit eineindeutig, und der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es sei nun zweitens die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ eineindeutig. Um zu zeigen, daß die Abbildung φ dann bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ $(\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2)$ zwei Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$. Dem Punkte $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ entspricht auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ein Punkt λ_{a_1} bzw. λ'_{a_2}. Dabei ist wieder $a_j = f(\tilde{a}_j)$ $(j = 1, 2)$ und die Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} sind dadurch charakterisiert, daß in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$ gilt

$$\lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}) \tag{1}$$

und in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$\lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}). \tag{2}$$

Nach Voraussetzung ist $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, also $a_1 = a_2 = a$, d.h. die lokalen Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} gehören zu *demselben* Punkt a. Andererseits sind dies zwei *verschiedene* zum Punkte a gehörige lokale Abbildungen, denn λ_a bzw. λ'_a ist, als Punkt von $\tilde{R}_1$, Bildpunkt von $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ und die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist nach Voraussetzung eineindeutig. Es gibt daher eine Umgebung V_a von a, so daß für alle Punkte z von V_a, eventuell abgesehen von $z = a$, gilt $\lambda_a(z) \neq \lambda'_a(z)$. Nun wählen wir zum Punkte $\tilde{a}_j$ $(j = 1, 2)$ eine Umgebung $V_{\tilde{a}_j}$ $(V_{\tilde{a}_j} \subset U_{\tilde{a}_j})$, deren Bild auf a in der Umgebung V_a enthalten ist. Dann haben die φ-Bilder der Umgebungen $V_{\tilde{a}_1}$ und $V_{\tilde{a}_2}$ nur den Punkt a gemeinsam; es seien nämlich $\tilde{z}_1$ bzw. $\tilde{z}_2$ zwei Punkte von $V_{\tilde{a}_1}$ bzw. $V_{\tilde{a}_2}$, so daß $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, also $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2) = z$ und $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2) = z'$. Der Punkt z liegt dann in der Umgebung V_a und die Gln. (1) und (2) besagen, daß $\lambda_a(z) = z'$ und $\lambda'_a(z) = z'$, also $\lambda_a(z) = \lambda'_a(z)$. Dies ist in der Umgebung V_a nur so möglich, daß $z = a$. Daraus folgt weiter $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$,

denn der Punkt $\tilde{z}_1$ gehört der ausgezeichneten Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ an und liegt über dem Punkte a; ebenso zeigt man, daß $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$. Aus der Gleichung $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, wobei $\tilde{z}_1$ in $V_{\tilde{a}_1}$ und $\tilde{z}_2$ in $V_{\tilde{a}_2}$ liegt, folgt somit $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$ und $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$, was bedeutet, daß die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist.

9. Konstruktion der Abbildung φ. Nach diesem Ergebnis kommt es also darauf an, eine gegebene RIEMANNsche Fläche R mittels zweier meromorpher Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bis auf isolierte Punkte eineindeutig in das Produkt der beiden Zahlenkugeln abzubilden. Denn dann ist die Fläche R nach 8. zur schwächsten Uniformisierenden der Beziehung $x \leftrightarrow x'$ konform äquivalent (mittels der Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$). Es sei $f(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf der Fläche R. R' sei ein zweites Exemplar der Fläche R und α eine topologische und direkt konforme Abbildung von R auf R'. Der Funktion $f(z)$ entspricht auf der Fläche R' eine Funktion $f'(z')$, definiert durch

$$f'(z') = f(\alpha^{-1} z').$$

Nun erklären wir zwischen den Flächen R und R' eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, indem wir zwei Punkte z und z' genau dann einander zuordnen, wenn $f(z) = f'(z')$. Insbesondere ist also z, αz ein Paar zugeordneter Punkte.

Die so erklärte mehrdeutige Beziehung erfüllt die Bedingungen A und B von 3., während C im allgemeinen nicht erfüllt ist. Dies sieht man schon an dem einfachen Beispiel der Funktion $f(z) = z^2$ auf der z-Kugel; hier gehören zu jedem Punkt a die zwei lokalen Abbildungen $\lambda_a(z) = z$ und $\lambda'_a(z) = -z$ und diese sind nicht miteinander verbindbar im Sinne der Bedingung C. Faßt man alle lokalen Abbildungen, die miteinander gemäß C verbindbar sind, in eine Klasse zusammen, so erfüllen die Abbildungen einer solchen Klasse die Bedingungen A, B und C. Zu jeder Klasse gehört somit eine schwächste Uniformisierende $\tilde{R}$ und man erhält also insgesamt ein System von uniformisierenden Flächen $(\tilde{R})$ entsprechend den verschiedenen Klassen.

Von den Klassen miteinander verbindbarer Abbildungen ist eine ausgezeichnet, die von den lokalen Abbildungen $\lambda_a = \alpha$ gebildete. Die zugehörige schwächste Uniformisierende $\tilde{R}_0$ ist zur Fläche R konform äquivalent.

10. Zwei spezielle Eigenschaften der Uniformisierenden $(\tilde{R})$. Aus der Konstruktion der Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ folgt, daß es zu jedem Paar z, z' nur endlich viele lokale Abbildungen λ_z gibt, für die $\lambda_z(z) = z'$. Es gibt auf dem Flächensystem $(\tilde{R})$ also nur endlich viele Punkte, die gleichzeitig über z und z' liegen.

Die oben erklärte Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ erfüllt ferner die Bedingung D von 4. Jede Komponente $\tilde{R}$ von $(\tilde{R})$ besitzt somit die Eigenschaft 3. von 6: Ist a, a' ein Paar zugeordneter Punkte und sind $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \dots r)$ die Punkte von $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen, so gibt es Umgebungen V_a, $V_{a'}$, $V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\tilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören.

Aus diesen beiden Eigenschaften der Überlagerungsflächen $(\tilde{R})$ sollen jetzt zwei Folgerungen gezogen werden.

11. Es sei $\tilde{z}_\nu$ eine Punktfolge auf $(\tilde{R})$, so daß die Folgen $z_\nu = \sigma \tilde{z}_\nu$ bzw. $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ auf R bzw. R' konvergent sind. Dann besitzt die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine konvergente Teilfolge. Zum Beweis sei $z_\nu \to a$ und $z'_\nu \to a'$. Da für alle ν gilt

$$f(z_\nu) = f'(z'_\nu),$$

folgt

$$f(a) = f'(a'),$$

die Punkte a und a' sind also einander zugeordnet. Nach 10. gibt es also endlich viele Punkte $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \dots r)$ auf $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen. Ferner gibt es Umgebungen $V_a, V_{a'}, V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte von $(\tilde{R})$, deren Spurpunkte auf R bzw. R' in V_a bzw. $V_{a'}$ liegen, in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ enthalten sind. Dies gilt insbesondere für fast alle Punkte $\tilde{z}_\nu$. Eine der endlich vielen Umgebungen $V_{\tilde{a}_\varrho}$, etwa $V_{\tilde{a}_1}$, muß also eine unendliche Teilfolge von $\tilde{z}_\nu$ enthalten. Diese Teilfolge konvergiert dann gegen $\tilde{a}_1$, da sie in einer ausgezeichneten Umgebung enthalten ist und die Folge der Spurpunkte gegen a konvergiert. Damit ist eine konvergente Teilfolge angegeben.

12. Es sei $\tilde{R}_1$ eine der Flächen $(\tilde{R})$ und R_1 bzw. R'_1 seien ihre Spurflächen auf R bzw. R'. Auf der Fläche R sei eine offene Menge U gegeben. T sei der Durchschnitt UR_1 und T' sein Bild auf R'_1, d.h. das σ'-Bild desjenigen Teiles von $\tilde{R}_1$, dessen σ-Bild in der Menge U enthalten ist. Ist dann T' kompakt bezüglich R', so umfaßt der Durchschnitt T — sofern er nicht leer ist — eine ganze Komponente der Menge U. Zum Beweis zeigen wir, daß die Menge T bezüglich U sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Das erste ist wegen der Offenheit von R_1 klar. Um zu zeigen, daß T bezüglich U auch abgeschlossen ist, sei a ein Häufungspunkt von T, der in U liegt. z_ν sei eine Folge von T, so daß $z_\nu \to a$. Zu jedem Punkt z_ν wählen wir auf der Fläche $\tilde{R}_1$ einen Urbildpunkt $\tilde{z}_\nu$. Die Folge $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ der Spurpunkte auf R'_1 liegt dann in T' und wegen der Kompaktheit von T' gibt es somit eine (auf R') konvergente Teilfolge. Daher besitzt nach 11. auch die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine (auf $\tilde{R}$) konvergente Teilfolge. Ihr Grenzpunkt $\tilde{a}$ liegt, wie alle Punkte der Folge — auf der Komponente $\tilde{R}_1$. Sein Spurpunkt auf R ist $\sigma \tilde{a} = a$, d.h. der Punkt a gehört noch zur Fläche R_1. Andererseits liegt er nach Voraussetzung in U und somit auch im Durchschnitt T. Jeder Häufungspunkt von T bezüglich U gehört also zu T und T ist somit eine abgeschlossene Teilmenge von U.

Fällt die offene Menge U mit der ganzen Fläche R zusammen, so lautet dieses Ergebnis: Ist das Bild R'_1 einer Fläche R_1 kompakt bezüglich R', so umfaßt die Fläche R_1 ganz R.

13. Abzählbarkeit des Systems $(\tilde{R})$. Das System $(\tilde{R})$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Komponenten. Es genügt zu zeigen, daß man den Raum $(\tilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen überdecken kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die Abbildung des Raumes $(\tilde{R})$ in das Produkt $R \times R'$, die durch die Zuordnung $z = \sigma \tilde{z}$, $z' = \sigma' \tilde{z}$ bestimmt ist. Der Bildraum A

besteht aus den Paaren z, z' einander zugeordneter Punkte. Jeder Punkt a, a' von A besitzt nach 10. auf dem System $(\tilde{R})$ endlich viele Urbildpunkte $\tilde{a}_\varrho$. Ferner gibt es nach 10. Umgebungen V_a, $V_{a'}$, $V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\tilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Die Paare zugeordneter Punkte z, z', wobei z in V_a und z' in $V_{a'}$ liegt, bilden eine Umgebung $V(a, a')$ des Punktes (a, a') bezüglich A. Zu jedem Punkt (a, a') von A gibt es also eine Umgebung $V(a, a')$, so daß alle Urbildpunkte von $V(a, a')$ der Menge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Das System der Umgebungen $V(a, a')$, wobei (a, a') den ganzen Raum A durchläuft, bildet eine Überdeckung des Raumes A. Nun besitzt das Produkt $R \times R'$ eine abzählbare Basis und damit auch die Teilmenge A. Daher wird der Raum A bereits durch ein abzählbares System von Umgebungen $V_{(a_\nu, a'_\nu)}$ überdeckt. Die zugehörigen Umgebungen $V_{\tilde{a}_{\nu\varrho}}$, wobei $\tilde{a}_{\nu\varrho}$ bei festem ν alle Urbildpunkte von (a_ν, a'_ν) durchläuft, bildet dann eine Überdeckung des Raumes $(\tilde{R})$. Ist nämlich $\tilde{z}$ ein beliebiger Punkt von $(\tilde{R})$, so ist sein Bildpunkt (z, z') in einer Umgebung $V(a_\nu, a'_\nu)$ enthalten, etwa in $V(a_1, a'_1)$. Dann muß der Punkt $\tilde{z}$ in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_{1\varrho}}$ enthalten sein. Damit ist eine Überdeckung des Raumes $(\tilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen hergestellt.

14. Bedingung für die Funktion $g(z)$. Es soll jetzt zur gegebenen Funktion $f(z)$ eine zweite meromorphe Funktion $g(z)$ konstruiert werden, so daß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung φ der Fläche R in das Produkt der beiden Zahlenkugeln bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist. Sei zunächst $g(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf R. Wir nehmen an, daß die Abbildung φ für zwei Punkte a und b $(a \neq b)$ die verlangte Eigenschaft nicht besitzt. Es gebe also zwei Punktfolgen $a_\nu \to a$ und $b_\nu \to b$, so daß $f(a_\nu) = f(b_\nu)$ und $g(a_\nu) = g(b_\nu)$, wobei entweder unendlich viele Punkte a_ν von a verschieden oder unendlich viele Punkte b_ν von b verschieden sind. Wir betrachten neben der Fläche R wieder die Fläche R' und übertragen die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ mittels der Abbildung α auf die Fläche R'. Dann lauten die beiden obigen Gleichungen, wenn man noch $b'_\nu = \alpha\, b_\nu$ setzt,

$$f(a_\nu) = f'(b'_\nu) \quad \text{und} \quad g(a_\nu) = g'(b'_\nu).$$

Wegen der ersten Gleichung gibt es für jedes ν einen Punkt $\tilde{z}_\nu$ auf $(\tilde{R})$, der gleichzeitig über a_ν und über b'_ν liegt. Wegen der Konvergenz $a_\nu \to a$ und $b'_\nu \to b'$ $(b' = \alpha\, b)$ besitzt die Folge $\tilde{z}_\nu$ nach 11. eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $\tilde{z}_\nu$ bezeichnen. Es sei $\tilde{a}$ ihr Grenzpunkt und $\tilde{R}_1$ die Komponente von $(\tilde{R})$, welche den Punkt $\tilde{a}$ enthält. Die Spurpunkte von $\tilde{a}$ sind $\sigma\tilde{a} = a$ und $\sigma'\tilde{a} = b'$. Die Komponente $\tilde{R}_1$ ist daher sicher von der Fläche $\tilde{R}_0$ (vgl. 9. letzter Absatz) verschieden, denn sonst wäre $b' = \alpha\, a$ und damit $b = a$. Wir bemerken noch, daß die Folge $\tilde{z}_\nu$ unendlich viele von ihrem Grenzpunkt verschiedene Punkte besitzt, da mindestens eine der Folgen a_ν und b'_ν diese Eigenschaft hat.

Der Funktion g entspricht auf der Fläche $\widetilde{R}_1$ eine Funktion $\tilde{g}$ gemäß

$$\tilde{g}(\tilde{z}) = g(\sigma\tilde{z});$$

ebenso kann man die Funktion g' von R' nach $\widetilde{R}_1$ übertragen und erhält so eine Funktion

$$\tilde{g}'(\tilde{z}) = g'(\sigma'\tilde{z}).$$

Auf der Folge $\tilde{z}_\nu$ gilt

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = g(a_\nu)$$

und

$$\tilde{g}'(\tilde{z}_\nu) = g'(b'_\nu)$$

und daher, da nach Voraussetzung $g(a_\nu) = g'(b'_\nu)$,

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = \tilde{g}'(\tilde{z}_\nu).$$

Dies ist wegen der Analytizität der Funktionen $\tilde{g}$ und $\tilde{g}'$ für die konvergente Folge $\tilde{z}_\nu$ (die unendlich viele von $\tilde{a}$ verschiedene Punkte enthält) nur so möglich, daß $\tilde{g} = \tilde{g}'$ auf der ganzen Fläche $\widetilde{R}_1$.

Daraus folgt weiter, daß die Funktion g und g' in je zwei einander (mittels der Beziehung $z \leftrightarrow z'$) zugeordneten Punkten z und z' der Spurflächen R_1 und R'_1 von $\widetilde{R}_1$ denselben Wert haben. Denn die Punkte z bzw. z' sind die Spurpunkte eines Punktes $\tilde{z}$ von $\widetilde{R}_1$, $z = \sigma\tilde{z}$, $z' = \sigma'\tilde{z}$ und damit wird $g(z) = \tilde{g}(\tilde{z})$ und $g'(z') = \tilde{g}'(\tilde{z})$, also $g(z) = g'(z')$.

Gelingt es also, die Funktion $g(z)$ zur gegebenen Funktion $f(z)$ so zu wählen, daß diese Situation auf keiner der Spurflächen R_1 besteht (abgesehen von der Spurfläche $R_0 = \sigma\widetilde{R}_0 = R$), so muß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ vermittelte Abbildung bis auf isolierte Punkte eineindeutig sein.

15. Konstruktion der Funktion $g(z)$. Der Raum $(\widetilde{R})$ besteht nach 13. aus abzählbar vielen Flächen $\widetilde{R}_\nu$. Es bezeichne R_ν bzw. R'_ν die Spurfläche von $\widetilde{R}_\nu$ auf R bzw. R' ($\nu = 1, 2, \ldots$). Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß es für jedes ν ein Punktepaar z_ν, z'_ν ($z_\nu \in R_\nu$, $z'_\nu \in R'_\nu$, $z_\nu \leftrightarrow z'_\nu$, $z'_\nu \neq \alpha z_\nu$) gibt, für das $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$. Wir zeigen zunächst, daß man zwei derartige Punktfolgen z_ν und z'_ν angeben kann, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind, d.h. keinen Häufungspunkt besitzen[5]).

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, die ersten drei Bedingungen zu berücksichtigen. Ist z_ν, z'_ν eine Folge von Punktepaaren, welche diesen Bedingungen genügt, so kann man auch eine Folge angeben, die allen vier Bedingungen genügt. Dazu betrachten wir für ein bestimmtes ν die uniformisierende Fläche $\widetilde{R}_\nu$; $\tilde{z}_\nu$ sei ein Punkt von $\widetilde{R}_\nu$, der gleichzeitig über z_ν und z'_ν liegt, also eine lokale Abbildung λ_{z_ν}, welche den Punkt z_ν in den Punkt z'_ν überführt. Da die Fläche $\widetilde{R}_\nu$ von der Fläche $\widetilde{R}_0$ verschieden ist, ist diese lokale Abbildung von der Abbildung α verschieden und daher kann man, falls zufällig $z'_\nu = \alpha z_\nu$

[5]) Bei der folgenden Konstruktion wird die Fläche R als nichtkompakt vorausgesetzt. Der kompakte Fall wird in 20. betrachtet.

sein sollte, die Punkte z_ν und z'_ν durch zwei andere einander zugeordnete Punkte (die beliebig nahe an z_ν bzw. z'_ν liegen) ersetzen. Dabei bleiben die drei ersten Eigenschaften erhalten.

Um nun eine Folge z_ν, z'_ν zu konstruieren, welche den ersten drei Bedingungen genügt, betrachten wir zunächst die Flächenpaare R_ν, R'_ν mit folgender Eigenschaft:

Ist A_ν bzw. A'_ν ein beliebiger kompakter Teil von R_ν bzw. R'_ν, so gibt es ein Paar zugeordneter Punkte z, z', so daß z im Komplement von A_ν und z' im Komplement von A'_ν liegt. Dann kann man eine Folge einander zugeordneter Punkte z_ν, z'_ν $(z_\nu \in R_\nu, z'_\nu \in R'_\nu)$ angeben, so daß die Folgen z_ν und z'_ν beide divergent sind.

Zweitens betrachten wir diejenigen Flächen R_ν, die bezüglich R kompakt sind. Dann umfaßt jede der Bildflächen nach 12. die ganze Fläche R'. Wir wählen dann einen festen Punkt a' auf R'; dieser hat auf jeder Fläche R_ν einen zugeordneten Punkt a_ν. Es ist $f(a_\nu) = f'(a')$ und daher kann die Folge a_ν auf der Fläche R keinen Häufungspunkt besitzen; denn sonst wäre die Funktion $f(z)$ (die in allen Punkten a_ν denselben Wert hat) konstant. Damit ist auch auf diesen Flächen eine Punktfolge mit der verlangten Eigenschaft angegeben und ebenso verfährt man mit denjenigen Flächen R_ν, deren Bildflächen R'_ν in R' kompakt sind. Schließlich sei R_1, R'_1 ein Flächenpaar, das nicht zu den bisher betrachteten Klassen gehört. Dieses ist dann durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Es gibt einen kompakten Teil A bzw. A' von R_1 bzw. R'_1, so daß das Bild (mittels der Beziehung $R_1 \leftrightarrow R'_1$) des Komplementes B von A in A' enthalten ist. Nun sei

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \to R$$

eine feste Ausschöpfung der Fläche R durch kompakte Teilflächen, die unabhängig von den Flächen R_ν konstruiert wird. Der nichtkompakte, zu A_μ komplementäre Teil von R sei B_μ, so daß also $R = A_\mu + B_\mu$. Es sei T_μ der Durchschnitt $R_1 B_\mu$ und T'_μ sein Bild auf R'. Da R_1 bezüglich R nicht kompakt ist, ist kein T_μ leer. T'_μ ist dann von einem bestimmten $\mu = \mu_1$ an in dem kompakten Teil A' der Fläche R' enthalten. Daraus folgt nach 12., daß der Durchschnitt T_{μ_1} eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_1} umfassen muß, etwa $B_{\mu_1 \lambda_1}$[6]). Die Fläche R_1 muß daher die Komponente $B_{\mu_1 \lambda_1}$ umfassen.

Auf diese Art erhält man zu jedem Flächenpaar R_ν, R'_ν der betrachteten Klasse eine Zahl μ_ν, so daß die Fläche R_ν eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_ν} überdeckt. Dabei ist es keine Einschränkung, die Folge μ_ν monoton wachsend anzunehmen.

16. Die Funktion $f(z)$, die bisher beliebig (meromorph) war, soll nun näher festgelegt werden, und zwar mit Hilfe der gegebenen Ausschöpfung A_μ. Wir wählen für jedes μ auf jeder Komponente $B_{\mu\lambda}$ von B_μ einen Punkt $b_{\mu\lambda}$. Diese Punkte kann man so wählen, daß die Menge $b_{\mu\lambda}$ auf der Fläche R divergent

[6]) Die dort betrachtete Punktmenge U ist in diesem Fall B_{μ_1}.

ist. Es gibt dann nach 18. eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche in allen Punkten $b_{\mu\lambda}$ denselben Wert, etwa eins, annimmt[7]).

17. Mit Hilfe der Punkte $b_{\mu\lambda}$ konstruieren wir jetzt eine divergente Folge von Punktepaaren z_ν, z'_ν: Die Fläche R_ν umfaßt eine Komponente $B_{\mu_\nu\lambda_\nu}$ von B_{μ_ν} und enthält somit den Punkt $b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$; wir setzen $z_\nu = b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$. Die Folge z_ν ist dann auf R divergent; aber auch die Folge der zugeordneten Punkte kann auf R' keinen Häufungspunkt besitzen, denn es ist $f'(z'_\nu) = f(z_\nu) = 1$ für alle ν. Damit ist eine Folge z_ν, z'_ν der verlangten Art konstruiert.

Aus den vier Folgen z_ν, z'_ν, die wir entsprechend der obigen Fallunterscheidung erhalten haben, kann man nun eine einzige Folge z_ν, z'_ν ($z_\nu \in R_\nu$, $z'_\nu \in R'_\nu$, $z_\nu \leftrightarrow z'_\nu$) konstruieren, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind. Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$, oder, wenn man $z'_\nu = \alpha z''_\nu$ setzt, $g(z_\nu) \neq g(z''_\nu)$; da $z'_\nu \neq \alpha z_\nu$, gilt $z''_\nu \neq z_\nu$.

18. Die Konstruktion einer solchen Funktion $g(z)$ gelingt jetzt auf Grund des folgenden Satzes:

Es sei z_ν ($z_\nu \neq z_\mu$ für $\nu \neq \mu$) eine divergente Punktfolge auf einer RIEMANNschen Fläche R und $\varkappa_\nu$ eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem die Fläche R hyperbolisch oder parabolisch ist. Im ersten Fall bilden wir die Folge $G(z, z_\nu)$ der GREENschen Funktionen. Diese Folge ist für jeden Punkt z, der von den Polen z_ν verschieden ist, beschränkt, denn es ist

$$G(z, z_\nu) = G(z_\nu, z)$$

und die Punkte z_ν liegen, da sie auf R keinen Häufungspunkt besitzen, alle außerhalb einer Umgebung des Punktes z. Ist nun α_ν eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen, so ist die Summe

$$u(z) = \Sigma \alpha_\nu G(z, z_\nu)$$

in jedem Punkt z ($z \neq z_\nu$) konvergent und stellt somit eine harmonische Funktion dar, die für $z \neq z_\nu$ regulär ist und im Punkte z_ν die Entwicklung

$$u(z) = \alpha_\nu \log \left| \frac{1}{z - z_\nu} \right| + \text{reguläre Funktion}$$

besitzt. Die Kovariante

$$\varphi = u_x - i u_y$$

ist daher für $z \neq z_\nu$ ebenfalls regulär und hat für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\varphi = -\frac{\alpha_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion.}$$

Nun bilden wir mit Hilfe der gegebenen Zahlen $\varkappa_\nu$ die Reihe $\beta_\nu = \alpha_\nu \varkappa_\nu$. Diese ist mit der Reihe α_ν ebenfalls absolut konvergent und man kann daher

[7]) Man beachte, daß bei der Konstruktion der Funktion $f(z)$ kein Gebrauch von den Flächen R_ν gemacht wird, welche erst durch die Funktion $f(z)$ bestimmt sind.

vie oben eine Kovariante ψ konstruieren, die für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\psi = -\frac{\beta_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion}$$

iat. Der Quotient

$$g(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

st dann eine meromorphe Funktion auf der Fläche R und es gilt

$$g(z_\nu) = \varkappa_\nu,$$

l.h. die Funktion $g(z)$ nimmt für $z = z_\nu$ den Wert $\varkappa_\nu$ an.

19. Ist die Fläche R parabolisch, so wählen wir zu jedem Punkt z_ν einen benachbarten Punkt z'_ν. Dann kann man zu jedem Punktepaar z_ν, z'_ν ein Normalpotential dritter Gattung konstruieren, d.h. eine Potentialfunktion $u(z; z_\nu, z'_\nu)$, die in einer Parameterumgebung des Punktes z_ν von der Form

$$u(z; z_\nu, z'_\nu) = \log \left| \frac{z - z_\nu}{z - z'_\nu} \right| + \text{reguläre Funktion}$$

st und außerhalb dieser Umgebung beschränkt bleibt[8]). Dieses Potential ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wir wählen jetzt einen festen Punkt z_0 $(z_0 \neq z_\nu)$ auf R und bilden die Funktionen

$$v(z, z_0;\ z_\nu, z'_\nu) = u(z;\ z_\nu, z'_\nu) - u(z_0 \cdot z_\nu, z'_\nu).$$

Da die Fläche R parabolisch und damit nullberandet ist, gilt der Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter[9]),

$$v(z, z_0;\ z_\nu, z'_\nu) = v(z_\nu, z'_\nu;\ z, z_0).$$

Da die Folge z_ν und damit auch die Folge z'_ν auf R divergent ist, bleibt die Folge $v(z_\nu, z'_\nu; z, z_0)$ für $\nu \to \infty$ beschränkt und dasselbe gilt daher auch für die Funktionen $v(z, z_0; z_\nu, z'_\nu)$. Nun kann man genau wie im hyperbolischen Fall eine meromorphe Funktion $g(z)$ konstruieren, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

20. Der Fall einer unbegrenzten Überlagerung. Kann man auf der gegebenen Fläche R eine meromorphe Funktion $f(z)$ so wählen, daß die durch sie bewirkte Spurabbildung die Unbegrenztheitsbedingung erfüllt[10]), so gelingt die Konstruktion einer bis auf isolierte Punkte eineindeutigen Abbildung in das Produkt der beiden Zahlenkugeln wesentlich einfacher. In diesem Fall überdeckt nämlich die Spurfläche R_ν jeder Komponente $\widetilde{R}_\nu$ des Systems $(\widetilde{R})$ ganz R. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden gleichbedeutend:

Ein beliebiges Funktionselement λ_a der Beziehung $z \leftrightarrow z'$ ist auf der ganzen Fläche R fortsetzbar.

[8]) Vgl. N. Kap. VI, § 4.

[9]) Vgl. N. Kap. V, § 3. Der dort gegebene Beweis für kompakte Flächen läßt sich auf nullberandete Flächen übertragen.

[10]) Vgl. N. Kap. II, § 4 (2.45).

Zum Beweis dieser letzten Eigenschaft sei z_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ ein beliebiger von a ausgehender Weg auf R. (τ) sei die Menge der t-Werte, so daß das Element λ_a längs des Teilweges z_t $(0 \leqq t \leqq \tau)$ fortsetzbar ist. Diese ist jedenfalls offen und wir können daher annehmen, daß sie das halboffene Intervall $0 \leqq t < 1$ enthält. Es ist zu zeigen, daß dann auch der Punkt z_1 zur Menge (τ) gehört. Es sei x_t das Bild des Weges z_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ auf der x-Kugel. Wegen der Unbegrenztheit der von der Funktion $f(z)$ bestimmten Überlagerung läßt sich dieser Weg vom Punkte $a' = \lambda_a(a)$ aus in die Fläche R' durchdrücken und man erhält so einen Weg z'_t $(0 \leqq t \leqq 1)$. Bezeichnet andererseits λ_t die durch das Anfangselement λ_a bestimmte Belegung des Weges z_t $(0 \leqq t < 1)$, so ist $\lambda_t(z_t)$ ein Weg auf R', der ebenfalls vom Punkte a' ausgeht und über dem Weg x_t liegt. Daher gilt

$$\lambda_t(z_t) = z'_t \qquad (0 \leqq t < 1).$$

Ferner gibt es, da die Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ die Eigenschaft D von 4. besitzt, eine wohlbestimmte lokale Abbildung λ_1 zum Punkte z_1, so daß die Punkte z_t und z'_t einander mittels der Abbildung λ_1 zugeordnet sind, falls t hinreichend nahe an 1 liegt, etwa für $t > 1 - \delta$. Dann bilden die Elemente λ_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ eine Belegung des ganzen Weges z_t $(0 \leqq t \leqq 1)$; ist nämlich t_1 ein fester t-Wert, so daß $t_1 > 1 - \delta$, so gilt für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t-Werte

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_{t_1}(z_t)$$

und wenn außerdem noch $t > 1 - \delta$,

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_1(z_t).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\lambda_{t_1}(z_t) = \lambda_1(z_t)$$

für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t. Dies ist nur so möglich, daß die Abbildung λ_{t_1} eine unmittelbare Fortsetzung von λ_1 ist.

Nachdem man festgestellt hat, daß die Spurflächen R_ν alle ganz R überdecken, kann man die Funktion $g(z)$ folgendermaßen konstruieren: Man wähle auf R zwei Punkte a und b, so daß $f(a) = f(b)$ und eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß $g(a) \neq g(b)$. Dann ist die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung der Fläche R bis auf isolierte Punkte eineindeutig. Denn sonst gäbe es nach 14. eine Spurfläche R_1, auf der die Gleichheit $f(z_1) = f(z_2)$ für zwei Punkte z_1 und z_2 stets die Gleichheit $g(z_1) = g(z_2)$ zur Folge hat. Die Spurfläche R_1 umfaßt aber jetzt ganz R und enthält somit die Punkte a und b, womit ein Widerspruch zur Konstruktion der Funktion $g(z)$ hergestellt ist.

Ist die Riemannsche Fläche R kompakt, so kann man die Funktion $f(z)$ immer so wählen, daß die durch sie bestimmte Überlagerung unbegrenzt ist. Man braucht für $f(z)$ nur eine rationale Funktion zu nehmen.

Zürich (Schweiz), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 16. November 1953.)

HOLYOKE, T. C.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 79/80 (1954)

Transitive extensions of dihedral groups.

By
T. C. HOLYOKE.

Let G be a transitive group of permutations on a given set of letters. Let a new fixed letter be adjoined to every permutation of G. Then a transitive group H of permutations on the combined set of letters is called a transitive extension of G if it contains G as the largest subgroup fixing the new letter (cf. [1], p. 751). The purpose of this paper is to show that *the only dihedral groups (including that containing an infinite cyclic subgroup) which possess transitive extensions when represented as groups of permutations of the cosets of a reflection subgroup are those of orders four, six, and ten.*

Let G be a faithful, non-regular permutation-representation of a dihedral group of order greater than four. In particular, let the dihedral group be generated by an element f of order two and an element w of order $n > 2$ or of infinite order, such that $w f = f w^{-1}$. Denote the subgroup consisting of f and the identity by F, the letter $F w^i$ (or $w^{-i} F$) by i (an element of the additive group of integers mod n or mod 0), and identify f and w with the permutations $(i \to -i)$ and $(i \to i+1)$ respectively. Designate $f w^i$ as representative for the coset $F w^i$, and call it u_i. Then u_i has order two.

If G possesses a transitive extension H, then there exist single-valued mappings β and γ of the set of elements of G not belonging to F into itself satisfying the following relations:

(1) $$g\gamma = u_j \quad \text{for some } j;$$

(2) $$[f^i (f^i g f^k)\beta]^{-1} g\beta = (f^i g f^k)\gamma f^k (g\gamma)^{-1} \in F;$$

(3) $$g\gamma\gamma \in F g;$$

(4) $$g\beta\gamma \in F(g\gamma)^{-1}.$$

These relations follow respectively from conditions (a), (b), (c) and (d) of theorem 2.6 in [2] (p. 789), since the element q of that theorem can be taken to be the identity, and since the automorphism α of that theorem must be the identity.

Since $g\gamma = u_j$ [by (1)], all elements $g\gamma$ have order two. Therefore relation (4) can be replaced by

(4′) $$g\beta\gamma \in F g\gamma.$$

For $r \neq 0$, let $(w^r)\gamma = f w^{t_r}$ $(t_r \neq 0)$. Write $w^r\gamma$ for $(w^r)\gamma$, etc. Relation (2), with $i = 0$, $k = 1$ and $g = w^r$, implies that $(w^r f)\gamma\, f (w^r\gamma)^{-1}$ is an element of F. Since $(w^r f)\gamma$ and $(w^r\gamma)^{-1}$ both have the form $f w^t$, this element is f rather than the identity, so that $(w^r f)\gamma = f w^{-t_r}$. Setting $i = 1$ and $k = 0$ in (2)

yields the result $(f g)\gamma = g\gamma$. Again in (2), set $i = k = 1$, $g = w^r$. Then

$$[f(f w^r f)\beta]^{-1} w^r \beta = (f w^r f)\gamma f (w^r \gamma)^{-1}$$
$$= (w^r f)\gamma f (w^r \gamma)^{-1} = f, \quad \text{and} \quad w^{-r}\beta = f w^r \beta f.$$

From relation (3), with $g = w^r$, it follows that $w^{t_r}\gamma = f w^r$. According to (4'), with $g = w^r$, $w^r \beta\gamma \in F w^{t_r}$, so that $w^r \beta\gamma = f w^{t_r}$. Now $(w^r \beta\gamma)\gamma = (w^r \beta)\gamma\gamma \in F w^r \beta$; on the other hand, $(w^r \beta\gamma)\gamma = (f w^{t_r})\gamma = w^{t_r}\gamma = f w^r$, as shown in the first sentence of this paragraph. Hence $f w^r \in F w^r \beta$, i.e., $w^r \beta \in F w^r$, so that $w^r \beta = w^r$ or $f w^r$. Therefore $w^{-r}\beta = w^{-r}$ or $f w^{-r}$.

Define the permutation c as fixing F and taking $F g$ into $F g\gamma$, the permutation b as fixing F and taking gF into $g\beta F$ $(g \notin F)$.

Then ([2], pp. 791—792), $b = c$, and H is generated by G and $c \cdot (\infty 0)$, where ∞ is the letter fixed by G. It can be assumed that $c \cdot (\infty 0)$ is conjugate to f, so that c fixes at most three letters besides ∞ and 0. Since c takes $F w^r$ into $F w^{t_r}$, b takes $w^{-r}F$ into $w^{-t_r}F$. But b takes $w^{-r}F$ into $w^{-r}\beta F$, hence $w^{-r}\beta = w^{-t_r}$ or $w^{-t_r} f$. Therefore $t_r = r$ or $t_r = -r$, and it follows that c fixes exactly one letter i and its negative, where $i \neq -i$, and takes every other letter except ∞ into its negative. Thus $f c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)\,(i, -i)$. This element, which belongs to H, cannot fix more letters than does f, for if it fixes as many as two letters, it belongs to a subgroup of H which is conjugate to F. Hence G is finite, and $n \leqq 6$.

For $n = 6$, $f \cdot c \cdot (\infty 0)$ can be assumed to be $(\infty 0)$ (15), since the only other possibility is $(\infty 0)$ (24), which is the product of f and $(\infty 0)$ (15). But $[f c \cdot (\infty 0) \cdot w]^4 = (\infty 10)$, which is impossible. For $n = 5$, $c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)$ (14) and $f c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)$ (23) or vice versa, so that G has at most (in fact, exactly) one transitive extension, and therefore cannot be extended to a triply transitive group ([2], p. 794). For $n = 4$, $c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)$, which is impossible. For $n = 2$ and $n = 3$, G is a symmetric group and has a trivial transitive extension.

Bibliography.

[1] Zassenhaus, H.: Über transitive Erweiterung gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien. Math. Ann. **111**, 748—759 (1935). — [2] Holyoke, T. C.: On the structure of multiply transitive permutation groups. Amer. J. Math. **74**, 787—796 (1952).

Northwestern University, Evanston, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 24. Juli 1953.)

Müller, M.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 81—87 (1954)

Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Von
Max Müller.

1. Es sei

$$\operatorname{sign}(u) = 1 \quad \text{für} \quad u > 0, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad u = 0, \qquad = -1 \quad \text{für} \quad u < 0$$

und ω eine positive Zahl. Dann gelten für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Fourier-Entwicklungen

$$C_n(x) = \operatorname{sign}\left(\cos\frac{2n\pi x}{\omega}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{2\lambda+1}\cos\frac{(2\lambda+1)\,n\,2\pi x}{\omega},$$

$$S_n(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{2n\pi x}{\omega}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\sin\frac{(2\lambda+1)\,n\,2\pi x}{\omega}.$$

Ist $f(x)$ eine reelle quadratisch integrierbare Funktion mit der Periode ω und den Fourier-Koeffizienten

$$(1) \qquad a_\nu = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\cos\frac{2\nu\pi x}{\omega}\,dx, \qquad b_\nu = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\sin\frac{2\nu\pi x}{\omega}\,dx,$$

so liefert die Parsevalsche Formel die Beziehungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} f(x)\,C_n(x)\,dx = \gamma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{2\lambda+1}\,a_{(2\lambda+1)n}, \\ \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} f(x)\,S_n(x)\,dx = \sigma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\,b_{(2\lambda+1)n}, \end{cases}$$

die für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelten.

Schon H. Liebmann[1]) und nach ihm P. Terebesi[2]) haben sie abgeleitet und darauf hingewiesen, daß sie für die praktische Berechnung der Fourier-Koeffizienten von Bedeutung sind, weil die Integrale auf der linken Seite von (2) oftmals einfacher zu ermitteln sind als die Integrale (1). Dies gilt

[1]) Liebmann, H.: Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff. Jber. dtsch. Math.-Ver. **18**, 433—449, bes. 443—449 (1909).

[2]) Terebesi, P.: Ein neues Näherungsverfahren zur harmonischen Analyse. Arch. Elektrotechn. **31**, 195—200 (1934). Vgl. auch A. Willers, Mathematische Instrumente, S. 171—173 (München u. Berlin, R. Oldenbourg 1943), oder A. Willers, Mathematische Maschinen und Instrumente, S. 197—199 (Berlin, Akademie-Verlag 1951).

besonders dann, wenn $f(x)$ graphisch gegeben ist und man sich eines Planimeters oder Integrimeters bedient. Zur Berechnung der a_ν aus den γ_n, bzw. der b_ν aus den σ_n ersetzt TEREBESI die Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen, die (2) für $n = 1, 2, \ldots$ liefert und die man eigentlich aufzulösen hätte, durch endliche lineare Näherungsgleichungssysteme, die entstehen, wenn man etwa nur die l ersten Gleichungen und auf deren rechten Seiten nur die l ersten Glieder berücksichtigt[3]). Die Berechtigung dieses Vorgehens und die Güte der dabei für die FOURIER-Koeffizienten a_ν und b_ν gewonnenen Näherungswerte $a_\nu^{(l)}$ und $b_\nu^{(l)}$ scheinen noch nicht untersucht worden zu sein; diese Untersuchung soll im folgenden nachgeholt werden.

H. LIEBMANN hat a. a. O. auch schon erwähnt, daß man die strengen Auflösungen der Gln. (2) nach den a_ν und b_ν formal mittels eines von H. BRUNS[4]) aufgestellten Hilfssatzes bewirken kann, die Auflösung allerdings nicht explizit angegeben und die auftretenden Konvergenzfragen ausdrücklich offen gelassen und als noch der Erörterung bedürftig bezeichnet. In der Tat scheint es zweifelhaft zu sein, ob die von BRUNS angegebenen Formeln unter der von BRUNS genannten Voraussetzung ausnahmslos gelten. Bei den hier vorliegenden Verhältnissen läßt sich aber die Auflösung durchführen; *es wird sich ergeben, daß unter den obigen Voraussetzungen, d.h. bei quadratisch integrierbarem* $f(x)$ *stets*

$$\left.\begin{aligned} (3_1) \qquad a_n &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}, \\ (3_2) \qquad b_n &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \sigma_{(2\nu+1)n} \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Dabei ist $\mu(k)$ die MÖBIUSsche Funktion, d.h. $\mu(1) = 1$ und für $k > 1$ $\mu(k) = 0$, wenn die ganze Zahl k durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist, aber $\mu(k) = 1$ oder $\mu(k) = -1$, je nachdem k das Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen ist.

Die von TEREBESI vorgeschlagenen Näherungswerte $a_\nu^{(l)}$ und $b_\nu^{(l)}$ sind gewisse Teilsummen der vorstehenden unendlichen Reihen, nämlich die folgenden:

$$(4) \qquad a_n^{(l)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-n}{2n}\right]} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}, \qquad b_n^{(l)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-n}{2n}\right]} \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \sigma_{(2\nu+1)n}$$

(leere Summen bedeuten die Null); für $l = 13$ sind die Formeln (4) bei TEREBESI a. a. O. und bei WILLERS a. a. O. explizit angegeben.

Wir führen im folgenden den Beweis von (3_1) durch. Der Beweis von (3_2) verläuft ganz analog.

[3]) Der Grundgedanke findet sich auch bei A. SCHLEIERMACHER, Zur Analyse von Wechselstromkurven. Elektrotechn. Z. **31**, 1246—1249 (1910).

[4]) BRUNS, H.: Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, S. 132—134 (Leipzig, B. G. Teubner 1903).

2. Zunächst bemerken wir, daß die in (2) für γ_n angegebene Reihe absolut konvergiert, denn es ist für $A = 0, 1, 2, \ldots$

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=0}^{A} \frac{1}{2\lambda+1} |a_{(2\lambda+1)n}| \leq \sqrt{\sum_{\lambda=0}^{A} \frac{1}{(2\lambda+1)^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{A} a_{(2\lambda+1)n}^2} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^2},$$

und bei unseren Voraussetzungen nach der BESSELschen Ungleichung $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ konvergent. Insbesondere folgt aus (2) und (5), daß

$$(6) \qquad \gamma_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Genauere Aussagen über die Raschheit dieses Grenzübergangs erhält man, wenn man bei entsprechenden schärferen Voraussetzungen über $f(x)$ die Ordnung des Gegennullstrebens der FOURIER-Koeffizienten a_ν beachtet. (Vgl. Nr. 5.)

3. Wir setzen

$$(7) \qquad \gamma_n(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{2\lambda+1} a_{(2\lambda+1)n} z^{(2\lambda+1)n};$$

diese Funktion ist, weil die Potenzreihe nach (5) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert, in $|z| < 1$ regulär analytisch und in $|z| \leq 1$ stetig; es ist $\gamma_n(1) = \gamma_n$.

Wir bilden die Reihe

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}(z).$$

Da diese in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert — wir werden in Nr. 4 sogar zeigen können, daß die Reihe der absoluten Beträge in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert —, ist nach dem WEIERSTRASSschen Doppelreihensatz

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}(z) \\ \quad = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{2\lambda+1} a_{(2\lambda+1)(2\nu+1)n} z^{(2\lambda+1)(2\nu+1)n} \\ \quad = \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^\varrho \left(\sum_{\substack{(2\lambda+1)(2\nu+1) \\ = 2\varrho+1}} \mu(2\nu+1) \right) \frac{a_{(2\varrho+1)n}}{2\varrho+1} z^{(2\varrho+1)n} \\ \quad = a_n z^n, \end{cases}$$

weil[5])

$$(10) \qquad \sum_{d|a} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a = 1 \\ 0 & \text{für} \quad a > 1 \end{cases}$$

[5]) Vgl. etwa E. LANDAU: Vorlesungen über Zahlentheorie I, S. 20—21 (Leipzig, S. Hirzel 1927).

und $a=2\varrho+1$ ungerade ist und daher nur ungerade Teiler, d.h. Teiler der Form $2\nu+1$ hat.

Da die Reihe (8) in $|z|\leqq 1$ gleichmäßig konvergiert und ihre Glieder in $|z|\leqq 1$ stetig sind, können wir den Grenzübergang $z\to 1-0$ in (9) gliedweise vollziehen; dabei ergibt sich die Formel (3_1).

4. Es ist in $|z|\leqq 1$ nach (7) und Nr. 2

$$|\gamma_n(z)|\leqq\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\,|a_{(2\lambda+1)n}|,$$

also für $N=0,1,2,\ldots,\ N'=0,1,2,\ldots,\ N'>N$

$$\sum_{\nu=N}^{N'}\left|(-1)^{\nu}\frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1}\gamma_{(2\nu+1)n}(z)\right|$$

$$\leqq\sum_{\nu=N}^{N'}\frac{|\mu(2\nu+1)|}{2\nu+1}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\,|a_{(2\lambda+1)(2\nu+1)n}|\,|z|^{(2\lambda+1)(2\nu+1)n}$$

$$=\sum_{\varrho=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{(2\lambda+1)(2\nu+1)\\=2\varrho+1,\\N\leqq\nu\leqq N'}}|\mu(2\nu+1)|\right)\frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1}\,|z|^{(2\varrho+1)n},$$

also erst recht

$$\leqq\sum_{\varrho=N}^{\infty}\left(\sum_{d/2\varrho+1}|\mu(d)|\right)\frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1},$$

falls die Reihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\left(\sum_{d/2\varrho+1}|\mu(d)|\right)\frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1}\tag{11}$$

konvergiert. Ist dies festgestellt, so folgt aus der letzten Abschätzung die behauptete gleichmäßige Konvergenz der Reihe (8) im Kreis $|z|\leqq 1$, und der Beweis der Formel (3_1) ist erbracht.

Wir formen die Reihe (11) etwas um. Es ist, wenn $p_1, p_2, \ldots$ die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots$ bedeutet und $2\varrho+1$ die Primfaktorenzerlegung

$$2\varrho+1=p_{\alpha_1}^{\beta_1}p_{\alpha_2}^{\beta_2}\ldots p_{\alpha_t}^{\beta_t}\qquad(\beta_\tau\geqq 1;\ \ \tau=1,\ldots,t)$$

hat, wie ein Blick auf den zitierten Beweis von (10) zeigt,

$$\sum_{d/2\varrho+1}|\mu(d)|=2^t=2^{P(2\varrho+1)},\tag{12}$$

wo $t=P(2\varrho+1)$ die Anzahl der verschiedenen in $2\varrho+1$ aufgehenden Primzahlen bedeutet. Die Formel (12) gilt auch im Falle $\varrho=0$, d.h. $t=0$, weil dann die linke und die rechte Seite den Wert 1 haben.

Um nun die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\Big(\sum_{d\mid 2\varrho+1}|\mu(d)|\Big)\frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1}=\sum_{\varrho=0}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}|$$

festzustellen, spalten wir dieselbe, unter T eine oberhalb 1 noch geeignet zu wählende Zahl verstehend, in die beiden Teilreihen

$$\sum_{\substack{\varrho=0\\ P(2\varrho+1)\leqq T}}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}| \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{\varrho=0\\ P(2\varrho+1)>T}}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}| \tag{13}$$

auf.

Die erste Teilreihe ist konvergent, weil für jede natürliche Zahl r

$$\sum_{\substack{\varrho=0\\ P(2\varrho+1)\leqq T}}^{r}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}|\leqq 2^T\sqrt{\sum_{\varrho=0}^{r}\frac{1}{(2\varrho+1)^2}\cdot\sum_{\varrho=0}^{r}a_{(2\varrho+1)n}^2}$$

$$\leqq 2^T\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^2}$$

ist.

Bei der Untersuchung der zweiten Teilreihe beachten wir, daß jetzt $2\varrho+1$ Primfaktoren hat, weil $t=P(2\varrho+1)>T>1$ ist; es ist

$$2\varrho+1\geqq p_{\alpha_1}\cdots p_{\alpha_t}\geqq p_2\cdots p_{t+1}\geqq\prod_{\tau=1}^{t}(2\tau+1),$$

$$\log(2\varrho+1)\geqq\sum_{\tau=1}^{t}\log(2\tau+1)>\int_0^t\log(2x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2t+1)\log\frac{2t+1}{e}+1\right]>(2t+1)\frac{1}{2}\log\frac{2t+1}{e}>(2t+1)K,$$

wobei

$$K=K(T)=\frac{1}{2}\log\frac{2T+1}{e}>0.$$

Daher ist

$$2^{P(2\varrho+1)}=2^t=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(2t+1)\log\sqrt{2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2}}e^{K^{-1}\log\sqrt{2}\log(2\varrho+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\varrho+1)^{K^{-1}\log\sqrt{2}}.$$

Wir wählen T so groß, daß $1-K^{-1}\log\sqrt{2}>\frac{1}{2}$ wird, d.h.

$$T>\frac{4e-1}{2}>4{,}93.$$

Bei solcher Wahl von T ist auch die zweite Teilreihe konvergent, da dann für jede natürliche Zahl r

$$\sum_{\substack{\varrho=0 \\ P(2\varrho+1)>T}}^{r} \frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1} |a_{(2\varrho+1)n}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\varrho=0}^{r} \frac{1}{(2\varrho+1)^{1-K^{-1}\log\sqrt{2}}} |a_{(2\varrho+1)n}|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{(2\varrho+1)^{2(1-K^{-1}\log\sqrt{2})}} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^2}$$

und unter der Quadratwurzel sowohl die erste Reihe [wegen $2(1-K^{-1}\log\sqrt{2})>1$] als auch die zweite Reihe konvergiert.

Als Summe der beiden konvergenten Teilreihen (13) ist auch die Reihe (11) konvergent.

5. *Zwei Beispiele.*

a) Die Funktion $f(x)$ habe an den Stellen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ des Intervalles $0 \leq x < \omega$ Sprünge und zwischen je zwei benachbarten Sprungstellen eine integrierbare, beschränkte Ableitung; es sei etwa $|f'(x)| \leq M_1$. Dann ist

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} [f(\xi_\varkappa - 0) - f(\xi_\varkappa + 0)] \sin\frac{2n\pi\xi_\varkappa}{\omega} - \frac{1}{n\pi} \int_0^\omega f'(x) \sin\frac{2n\pi x}{\omega}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} [f(\xi_\varkappa + 0) - f(\xi_\varkappa - 0)] \cos\frac{2n\pi\xi_\varkappa}{\omega} + \frac{1}{n\pi} \int_0^\omega f'(x) \cos\frac{2n\pi x}{\omega}\, dx,$$

also

$$\left.\begin{matrix} |a_n| \\ |b_n| \end{matrix}\right\} \leq \frac{1}{n\pi} \left(\sum_{\varkappa=0}^{k-1} |f(\xi_\varkappa - 0) - f(\xi_\varkappa + 0)| + \omega M_1 \right) = \frac{C}{n\pi}.$$

Damit wird in $|z| \leq 1$

$$\left.\begin{matrix} |\gamma_n(z)| \\ |\sigma_n(z)| \end{matrix}\right\} \leq \frac{C}{n\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^2} = \frac{C\pi}{8n};$$

die Reihe (8) hat die Majorante

$$\frac{C\pi}{8n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2},$$

ist also in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergent. Es gelten die Formeln (3), und es ist für $l \geq n$

$$\left.\begin{matrix} |a_n - a_n^{(l)}| \\ |b_n - b_n^{(l)}| \end{matrix}\right\} \leq \frac{C\pi}{8n} \sum_{\nu=\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} < \frac{C\pi}{8n} \int_{\left[\frac{l-n}{2n}\right]}^{\infty} \frac{ds}{(2s+1)^2} < \frac{C\pi}{16n} \frac{1}{2\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}.$$

b) $f(x)$ habe eine Ableitung k-ter Ordnung mit dem Stetigkeitsmaß $\Omega_k(\delta)$. Dann ist[6])

$$\left.\begin{matrix} |a_n| \\ |b_n| \end{matrix}\right\} \leq \frac{1}{n^k} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \frac{2}{\pi} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right).$$

[6]) Vgl. etwa C. DE LA VALLÉE POUSSIN: Leçons zur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, S. 15—16. Paris 1919.

Es ist, weil $\Omega_k(\delta)$ eine monoton steigende Funktion von δ ist,

$$\left.\begin{matrix}|\gamma_n(z)|\\|\sigma_n(z)|\end{matrix}\right\} \leqq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^k n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2(2\lambda+1)n}\right) \frac{1}{2\lambda+1}$$

$$\leqq C(\omega; k) \frac{1}{n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right),$$

wo

$$C(\omega; k) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^{k+1}},$$

und für $l \geqq n$

$$\left.\begin{matrix}|a_n - a_n^{(l)}|\\|b_n - b_n^{(l)}|\end{matrix}\right\} \leqq \frac{C(\omega; k)}{n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right) \sum_{\nu=\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{k+1}}$$

$$< \frac{C(\omega; k)}{2k\, n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right) \frac{1}{\left(2\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1\right)^k}.$$

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. September 1953.)

Bagchi, H. D., and B. N. Mukherjee
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 88—93 (1954)

Note on the operational representations of some special functions.

By
Hari das Bagchi and Bhola nath Mukherjee.

Introduction. The present paper deals mainly with certain applications of the methods of modern operational calculus, and eventual establishment of a class of relations (integral as well as functional), involving one or more of the functions:

$$h_n(x), \quad H_n(x), \quad L_n^{(\alpha)}(x), \quad l_n^{(\alpha)}(x), \quad J_n(x), \quad I_n(x), \quad k_{2n}(x), \quad P_n(x), \quad \gamma(n, x).$$

Besides, there are miscellaneous results on infinite integrals. The notations and conventions adopted in this paper are the same as those initiated by Van der Pol. Thus:

If
$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-px} g(x)\, dx, \qquad \text{(assumed convergent)}, \quad p > 0,$$

then we write

$$f(p) \doteqdot g(x) \qquad \text{or} \qquad g(x) \doteqdot f(p).$$

For the sake of clarity we quote below four basic propositions, which will be freely made use of in the paper:

If
$$f_1(p) \doteqdot g_1(x) \qquad \text{and} \qquad f_2(p) \doteqdot g_2(x),$$

then:

(I)
$$\frac{1}{p} f_1(p)\, f_2(p) \doteqdot \int_0^x g_1(t)\, g_2(x-t)\, dt$$

(II)
$$\int_0^\infty \frac{g_1(x)\, f_2(x)}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{g_2(x)\, f_1(x)}{x}\, dx.$$

If $f(p) \doteqdot g(x)$, then

(III)
$$\frac{p}{p+\alpha} f(p+\alpha) \doteqdot e^{-\alpha x} g(x)$$

(IV)
$$\frac{1}{p^{r-1}} f\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}r} J_r\{2(x\,s)^{\frac{1}{2}}\}\, g(s)\, ds \qquad (r > -1).$$

For the sake of brevity we shall use the following notations:

(V)
$$\begin{cases} \lambda(n) = n!\, 2^{2n-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}, & \mu(n) = n!\, 2^{2n+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \\ \Phi(n) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^n n!}, & \psi(n) = \dfrac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+\frac{1}{2}} n!}. \end{cases}$$

The following important results have been used in course of the proof:

(VI) $$L_n(x) = {}_1F_1(-n;\ 1;\ x), \qquad \text{where } n \text{ is arbitrary } [1]$$

(VII) $$x^\nu L_n^{(\nu)}(x) \doteqdot \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{n!} \cdot \frac{1}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n, \qquad R(\nu) > -1 \ [2]$$

(VIII) $$e^{-x} L_n(x) \doteqdot \frac{p^{n+1}}{(1+p)^{n+1}},$$

(IX) $$e^{-\frac{1}{2}x} k_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot (-1)^{n-1} \frac{p^n}{(1+p)^{n+1}} \quad [3].$$

$k_{2n}(x)$ being BATEMAN's function.

Although there are casual references to certain *known* results, still the paper is believed to embody some amount of *original* matter.

1. It has been shown by G. PALAMA [4] that a second solution other than $H_n(x)$ of the Hermite equation:

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0, \qquad (n \text{ is a } \textit{positive} \text{ integer})$$

is given by

(2) $$h_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n}\, l_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

and

(3) $$x^{-1} h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} n!\, 2^{2n+1}\, l_n^{(\frac{1}{2})}(x^2),$$

where

(4) $$l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\alpha}\, {}_1F_1(-n-\alpha,\ 1-\alpha,\ x),$$

α being non-integral. Putting $\alpha = \frac{1}{2}$ in (4), we get:

(5) $$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2r-1)} \cdot \frac{2^r}{r!}\, x^{r-\frac{1}{2}}\right],$$

where $m = n + \frac{1}{2}$.

From the formula for the Laplace transform of a general power, we deduce from (5)

$$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) \doteqdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2r-1)} \cdot \frac{2^r}{r!} \cdot \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{p^r}\right],$$

(6) $$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) \doteqdot -\sqrt{\frac{p\pi}{2}} \cdot \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Similarly putting $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (4), we get:

(7) $$l_n^{(-\frac{1}{2})}(x) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Combining (7) and (6) with (2) and (3) respectively, we get:

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

and

$$x^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \mu(n) \cdot \sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

2. Applying (I) to the relations:

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} \doteqdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ x\right) \tag{10}$$

and

$$\Phi(n) \sqrt{p} \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n \doteqdot x^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{x}\right), \tag{11}$$

we get:

$$(-1)^n \Phi(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}} \doteqdot \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{t}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ x - t\right) dt.$$

Hence by (8) and (VI), we have

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{t}\right) L_{-\frac{1}{2}}(x - t)\, dt. \tag{12}$$

Similarly

$$H_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\psi(n)}{\mu(n)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) L_{-\frac{1}{2}}(x - t)\, dt. \tag{13}$$

3. If we now apply (II) to (8) and (11), we get:

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n h_{2n}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{x}\right)}{x^2}\, dx. \tag{14}$$

Similarly we get

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)}{x^2}\, dx = \frac{\mu(n)}{\psi(n)} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} H_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx. \tag{15}$$

Modifying (9) in the form:

$$x^{-\frac{1}{2}} h_{2n-1}(x) \doteqdot (-1)^{n-1} \mu(n-1) \sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

and applying (I) to (16) coupled with $1 \doteqdot 1$ and interpreting the result by (8), we obtain

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) = -2n \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n-1}\left(\sqrt{t}\right) dt. \tag{17}$$

Differentiating (17) with respect to x, we obtain the recurrence-relation:

$$h'_{2n}(x) = -4n\, h_{2n-1}(x). \tag{18}$$

Adding (9) to (16) multiplied by $4n$, we obtain by (8) the recurrence-relation:

$$h_{2n+1}(x) + 2x\, h_{2n}(x) + 4n\, h_{2n-1}(x) = 0. \tag{19}$$

If we now apply (I) to $x^{\frac{1}{2}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, p^{-\frac{1}{2}}$ and (11), after changing n into $(m+n)$ in the latter of these relations, we derive:

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} H_{2m+2n}\left(\sqrt{t}\right) dt \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \Phi(m+n) \cdot \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{m+n}. \tag{20}$$

Similar applications of (I) yield:

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) h_{2m}\left(\sqrt{x-t}\right) dt \doteqdot m!\, n!\, 2^{2m+2n}\, \pi \cdot \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{m+n}, \tag{21}$$

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}} H_{2m}\left(\sqrt{t}\right) H_{2n+1}\left(\sqrt{x-t}\right) dt \doteqdot \Phi(m)\, \psi(n) \cdot \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{m+n}, \tag{22}$$

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} H_{2m+2n+1}\left(\sqrt{t}\right) dt \doteqdot m!\, n!\, 2^{2m+2n}\, \pi \cdot \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{m+n}. \tag{23}$$

Also we have the *known* relation:

$$x\, L^{(1)}_{m+n}(x) \doteqdot (-1)^{m+n}(m+n+1) \cdot \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)^{m+n}. \tag{24}$$

Comparing (20)—(24), we can easily establish several (subsidiary) relations of equality. For instance:

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) h_{2m}\left(\sqrt{x-t}\right) dt = (-1)^{m+n} \cdot \frac{m!\, n!}{m+n+1} \cdot 2^{2m+2n} \cdot \pi\, x\, L^{(1)}_{m+n}(x). \tag{25}$$

4. By (III) we get from (8) and (9)

$$e^{-x} h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{p^{n+\frac{1}{2}}}{(1+p)^{n+1}} \tag{26}$$

and

$$e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \mu(n) \cdot \frac{p^{n+\frac{3}{2}}}{(1+p)^{n+1}}. \tag{27}$$

Now applying (I) to (27) and interpreting the result by (26), we obtain:

$$\int_0^x e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) dt = 2 e^{-x} h_{2n}\left(\sqrt{x}\right). \tag{28}$$

Applying (IV) to (26) and taking $r = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ and $n + \frac{1}{2}$ in succession and interpreting the results by the relations:

$$\frac{1}{(1+p)^{n+1}} \doteqdot \frac{\gamma(n+1, x)}{\Gamma(n+1)}, \tag{29}$$

where $\gamma(n, x)$ is the *incomplete* Gamma function,

$$\frac{p}{(1+p)^{n+1}} \doteq \frac{e^{-x}x^n}{\Gamma(n+1)} \tag{30}$$

and

$$\frac{1}{p^n(1+p)^{n+1}} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} x^{n+\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right), \tag{31}$$

where $I_n(x)$ is the modified Bessel function, we deduce:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{3}{4}} J_{\frac{3}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{\gamma(n+1, x)}{\Gamma(n+1)}, \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{e^{-x}x^n}{\Gamma(n+1)} \tag{33}$$

and

$$\left\{ \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{2n+3}{4}} J_{\frac{2n+3}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds \right. \\ \left. = (-1)^n \cdot 2^{2n-\frac{1}{2}} \pi e^{-\frac{1}{2}x} x^{n+\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right). \right. \tag{34}$$

Applying (IV) with $r = \frac{1}{2}$ to (VIII) and with $r = 1$ to (26) and comparing the results, we obtain:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} L_n(s)\, ds. \tag{35}$$

Similarly from (26) and (27) and from (IV) and (IX), we get:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right) J_2\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{s}\right) ds, \tag{36}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = -\lambda(n) \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{3}{4}} J_{\frac{3}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-\frac{1}{2}s} k_{2n}\left(\frac{1}{2}s\right) ds. \tag{37}$$

Applying (I) to (26) and to $x^{-\frac{1}{2}} \doteq \sqrt{\pi}\, p^{\frac{1}{2}}$ and interpreting the result by (IX), we have:

$$\int_0^x e^{-t}(x-t)^{-\frac{1}{2}} h_{2n}\left(\sqrt{t}\right) dt = -n!\, 2^{2n-\frac{1}{2}} \pi e^{-\frac{1}{2}x} k_{2n}\left(\tfrac{1}{2}x\right). \tag{38}$$

Similarly from (VIII) and (38) we derive:

$$\int_0^x e^{-t}(x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) dt = (-1)^n n!\, 2^{2n+\frac{1}{2}} \pi e^{-x} L_n(x). \tag{39}$$

6. Expressing the operational relation (8) in the equivalent form:

$$\int_0^\infty e^{-pu} h_{2n}\left(\sqrt{u}\right) du = (-1)^n \lambda(n)\, p^{-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-\frac{1}{2}}$$

and using the relation: $p = \frac{1}{x^2}$, we get

$$\int_0^\infty h_{2n}(\sqrt{u}) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} e^{-\frac{u}{x^2}} du = \lambda(n) \cdot (x^2 - 1)^n.$$

Now differentiating both sides n times with respect to x and using Rodrigues' formula for the Legendre polynomial $P_n(x)$, we ultimately derive:

$$\int_0^\infty h_{2n}(\sqrt{u}) \cdot \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} \cdot e^{-\frac{u}{x^2}}\right\}\right] du = \lambda(n) \cdot 2^n n! P_n(x). \tag{40}$$

The legitimacy of differentiation under the integral sign for finite non-zero values of the parameter x can be easily established.

References.

[1] Szegö, G.: Orthogonal polynomials, Art 5.3, p. 99. 1939. — [2] McLachlan, N. W.: Modern Operational Calculus, p. 211. 1948. — [3] Shastri, N. A.: Note on some results involving Bateman functions $k_{2n}(x)$. J. Indian Math. Soc. New Ser. **3** (1938/39). — [4] Palama, G.: Funzioni di Laguerre di 2 specie. Boll. Un. mat. ital., III. s. **5**, 72—77 (1950).

Dept. of Math., Calcutta University, Calcutta (India).
Scottish Church College, Calcutta (India).

(Eingegangen am 16. Oktober 1953.)

Reid, W. T.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 94—97 (1954)

A Tauberian Theorem for Power Series.

By
William T. Reid.

1. *Introduction.* Recently Wielandt[1]) has given a brief and elegant modification of Karamata's[2]) proof of the result of Hardy and Littlewood[3]) to the effect that a series $\sum a_n$ of real terms is convergent if this series is Abel summable and there exists a constant K such that $n\,a_n \leqq K$, $(n = 1, 2, \ldots)$. It is the purpose of this note to point out that a slight modification of Wielandt's proof leads to a stronger Tauberian theorem.

For brevity, a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, will be said to satisfy condition Γ if: (α) $\sum_1^\infty d_n x^n$ converges for $|x| < 1$; (β) there exists a finite constant M such that $g(x) \equiv (1-x)\sum_1^\infty d_n x^n \leqq M$ on $0 \leqq x < 1$; (γ) $g(x^k) - g(x) \to 0$ as $x \to 1^-$ for each positive integer k. The result that will be established is as follows:

Theorem A. *If a_n, $(n = 0, 1, \ldots)$, is real, the series $\sum a_n$ is Abel summable, and there is a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ satisfying condition Γ for which $n\,a_n \leqq d_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, then the series $\sum a_n$ is convergent.*

A sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ that is Abel summable clearly satisfies condition Γ. Moreover, since for sequences of non-negative real numbers Abel summability is equivalent to $(C, 1)$ summability[4]), restriction of attention to such dominating sequences $\{d_n\}$ gives the following corollary, which contains the Hardy-Littlewood result for $d_n = K$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Corollary. *If a_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, is real, the series $\sum a_n$ is Abel summable, and there is a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ which is summable $(C, 1)$ and such that $n\,a_n \leqq d_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, then the series $\sum a_n$ is convergent.*

Section 3 of this note contains some comments on sequences which satisfy condition Γ, and also a generalization of Theorem A.

2. *Proof of Theorem A.* As in Wielandt's proof, it is noted that attention may be restricted to series $\sum a_n$ with $a_0 = 0$ and Abel summable to the value zero, and that the result of the stated theorem is established if it is shown

[1]) Wielandt, H.: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **56**, 206—207 (1952).

[2]) Karamata, J.: Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **32**, 319—320 (1930).

[3]) Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. Lond. Math. Soc. (2), **13**, 174—191 (1913/14); Theorem 11 in particular.

[4]) See Hardy and Littlewood: loc. cit., and Karamata, loc. cit.

hat the function $f^*(x)=0$, $0\leqq x<\frac{1}{2}$, $f^*(x)=1$, $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ belongs to the lass $\mathfrak{F}$ of functions real-valued on $0\leqq x<1$ and satisfying the conditions: i) $\sum_1^\infty a_n f(x^n)$ converges for $0<x<1$; (ii) $\sum_1^\infty a_n f(x^n)\to 0$ as $x\to 1^-$. In particular, $\mathfrak{F}$ contains all polynomials with real coefficients and constant erm equal to zero. Let $\mathfrak{F}_1$ denote the space of functions $f(x)$ real-valued on $0<x<1$ which satisfy (i) above and the following condition (iii): for each $\varepsilon>0$ there exist polynomials $p_1(x)$, $p_2(x)$ with real coefficients and zero constant terms such that $p_1(x)\leqq f(x)\leqq p_2(x)$, $0<x<1$, while $p_2(x)-p_1(x)=x(1-x)\,q(x)$ where $q(x)$ is a polynomial with $\int_0^1 q(x)\,dx<\varepsilon$. Still following WIELANDT's argument, as $f^*(x)\in\mathfrak{F}_1$ it suffices to show that $\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$. By a slight modification of WIELANDT's proof for the HARDY-LITTLEWOOD result we shall proceed to show that the hypotheses of Theorem A imply that $\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$.

Suppose that $\sum a_n$ satisfies the hypotheses of Theorem A, and for a function $f(x)\in\mathfrak{F}_1$ let $\{x_i\}$ be a sequence of values on $0<x<1$ such that $x_i\to 1$ and $\sum_1^\infty a_n f(x_i^n)\to\limsup_{x\to 1^-}\sum_1^\infty a_n f(x^n)$ as $i\to\infty$. In view of (α) and (β) of the definition of property Γ there is a value D, $0\leqq D\leqq M$, and a subsequence $\{x_j\}$ of $\{x_i\}$ such that $g(x_j)=(1-x_j)\sum_1^\infty d_n x_j^n\to D$ as $j\to\infty$; moreover, in view of (γ) of the definition of property Γ it follows that $g(x_j^k)\to D$ as $j\to\infty$ for $k=1,2,\ldots$. If $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)=\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho x^\varrho$ are polynomials satisfying condition (iii) for a given $\varepsilon>0$, then

$$\sum_1^\infty a_n f(x_j^n)-\sum_1^\infty a_n p_1(x_j^n)$$

$$=\sum_1^\infty a_n[f(x_j^n)-p_1(x_j^n)]\leqq\sum_1^\infty (d_n/n)[f(x_j^n)-p_1(x_j^n)]\leqq\sum_1^\infty (d_n/n)[p_2(x_j^n)-p_1(x_j^n)]$$

$$=\sum_1^\infty (d_n/n)(1-x_j^n)\,x_j^n\,q(x_j^n)\leqq\sum_1^\infty d_n(1-x_j)\,x_j^n\,q(x_j^n)$$

$$=\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho[(1-x_j)/(1-x_j^{\varrho+1})]\,g(x_j^{\varrho+1})\to D\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho/(\varrho+1)$$

$$=D\int_0^1 q(x)\,dx\leqq D\,\varepsilon\leqq M\,\varepsilon\quad\text{as}\quad x\to 1^-.$$

Since $p_1(x)\in\mathfrak{F}$ it then follows that

$$\limsup_{x\to 1^-}\sum_1^\infty a_n f(x^n)\leqq 0.$$

Similarly, if $\{x_i\}$ is a sequence on $0<x<1$ such that $x_i\to 1$ and

$$\sum_1^\infty a_n f(x_i^n)\to\liminf_{x\to 1^-}\sum a_n f(x^n)\quad\text{as}\quad i\to\infty,$$

and $\{x_j\}$ is a subsequence of $\{x_i\}$ such that $g(x_j)$ converges to a limit D as $j \to \infty$, a corresponding consideration of $\sum_1^\infty a_n p_2(x_j^n) - \sum_1^\infty a_n f(x_j^n)$ leads to the conclusion that $\liminf_{x \to 1^-} \sum_1^\infty a_n f(x^n) \geqq 0$. Consequently, it follows that $\sum_1^\infty a_n f(x^n) \to 0$ as $x \to 1^-$, and $f(x) \in \mathfrak{F}$.

3. *Additional remarks.* The author has been unable to exhibit a sequence of non-negative real constants $\{d_n\}$ that has property Γ, but is not Abel summable; however, it seems desirable to prove the seemingly more general result of Theorem A rather than to restrict attention to the result of the corollary. It is interesting to note that if $\{d_n\}$ is a sequence of non-negative real numbers satisfying condition Γ then:

1°. If $\{x_j\}$ is a sequence of values on $0 < x < 1$ such that $x_j \to 1$ and

$$g(x_j) \equiv (1 - x_j) \sum_1^\infty d_n x_j^n \to D \qquad \text{as} \quad j \to \infty,$$

then

$$(1 - x_j) \sum_1^\infty d_n x_j^n h(x_j^n) \to D \int_0^1 h(x)\, dx \quad \text{as} \quad j \to \infty,$$

for $h(x)$ an arbitrary bounded Riemann integrable function on $0 \leqq x \leqq 1$.

2°. If $L^* = \limsup_{x \to 1^-} g(x)$, $L_* = \liminf_{x \to 1^-} g(x)$, and

$$\delta_n = (d_1 + \cdots + d_n)/n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

then

$$\limsup_{n \to \infty} \delta_n = L^*, \quad \liminf_{n \to \infty} \delta_n = L_*,$$

and each value y on the interval $L_* \leqq y \leqq L^*$ is an accumulation point of the sequence $\{\delta_n\}$.

For the case of $\{d_n\}$ Abel summable results 1° and 2° reduce respectively to KARAMATA's lemma (loc. cit.) and the statement that for a non-negative real sequence Abel summability implies $(C, 1)$ summability. Indeed, one may establish 1° and 2° by simple modifications of the argument used by KARAMATA (loc. cit.), so no details of proof are given here.

Let $\mathfrak{A}$ denote the class of series $\sum a_n$ with real terms and satisfying the following conditions: (α') $\sum a_n x^n$ converges for $|x| < 1$; (β') $A(x) \equiv \sum a_n x^n$ is such that $A(x^k) - A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$ for $k = 2, 3, \ldots$. For example, if $\sum a_n x^n$ is the Maclaurin expansion of $\sin[\ln \ln (e/(1-x))]$, then $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ although $\sum a_n x^n$ does not tend to a limit as $x \to 1^-$; this particular example was suggested to the author by one of his students, Mr. RICHARD DRISCOLL. Moreover, let $A^* = \limsup_{x \to 1^-} A(x)$, $A_* = \liminf_{x \to 1^-} A(x)$, $s_n = a_0 + \cdots + a_n$,

$$s^* = \limsup_{n \to \infty} s_n, \quad s_* = \liminf_{n \to \infty} s_n.$$

The result of Theorem A may be generalized as follows.

Theorem B. *If* $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ *and there is a sequence of non-negative real numbers* $\{d_n\}$ *satisfying condition* Γ *for which* $n\,a_n \leqq d_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *then* $s^* = A^*$, $s_* = A_*$, *and each value of* y *on the interval* $A_* \leqq y \leqq A^*$ *is an accumulation point of the sequence* $\{s_n\}$.

Without loss of generality one may assume $a_0 = 0$. If $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ and $p(x)$ is a polynomial with constant term zero then $p(1)A(x) - \sum a_n p(x^n) \to 0$ as $x \to 1^-$. If $f(x)$ belongs to the space $\mathfrak{F}_1$ defined in Section 2 it follows that $f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ exists and $f(1^-) = p_1(1) = p_2(1)$ for polynomials $p_1(x)$, $p_2(x)$ satisfying (iii) of the definition of $\mathfrak{F}_1$ for any $\varepsilon > 0$. Consequently, for $f(x) \in \mathfrak{F}_1$ an argument similar to that of the last paragraph of Section 2 shows that $\sum a_n f(x^n) - f(1^-)A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$. This result for the particular function $f^*(x)$ defined in Section 2 gives that $s_{N(x)} - A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$, where $N(x)$ is the largest integer not exceeding $\ln 2/|\ln x|$, and from this latter relation the conclusion of Theorem B is immediate.

In particular, it may be verified readily that the hypotheses of Theorem B are satisfied by a series $\sum a_n$ of real terms for which the sequence $\{n|a_n|\}$ is summable (C,1) to the value zero.

Northwestern University, Evanston, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 18. Dezember 1953.)

SCHNEIDER, TH.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 98—108 (1954)

Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes.

Von
THEODOR SCHNEIDER.

Nach dem Satze von EISENSTEIN besitzt eine algebraische Funktion $y=f(z)$, bei der die Veränderlichen z und y durch ein Polynom $F(z, y)=0$ mit algebraischen Zahlenkoeffizienten miteinander verknüpft sind, auf jedem Blatt ihrer RIEMANNschen Fläche an einer regulären Stelle z_0, die gleichzeitig regulärer Wert der algebraischen Funktion $f(z)$, d.h. $F_y(z_0, y_0) \neq 0$, und eine algebraische Zahl ist, eine Potenzreihenentwicklung

$$y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\{a_\varkappa(z_0)\}\cdot(z-z_0)^\varkappa=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}a_\varkappa\cdot(z-z_0)^\varkappa,$$

deren Koeffizienten $a_\varkappa$ algebraische Zahlen aus einem von z_0 abhängigen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ endlichen Grades s sind mit der Eigenschaft, daß eine natürliche Zahl T existiert derart, daß $a_\varkappa T^\varkappa$ für alle Werte $\varkappa=1, 2, \ldots$ ganzalgebraisch wird.

Beim Beweise dieses Satzes, auf den ich nicht eingehen will[1]), erkennt man, daß T von z_0 abhängt, und man stellt bei der Durchführung dieses Beweises leicht fest, daß eine nur von den in $F(z, y)$ eingehenden Konstanten abhängige Konstante γ_1 existiert, so daß mit natürlichem $\nu>1$ für $z_0=\frac{1}{\nu}$ und für ein dem EISENSTEINschen Satze genügendes T die Abschätzung

$$T\left(\frac{1}{\nu}\right)<\nu^{\gamma_1} \qquad (\nu=2, 3, \ldots) \tag{1}$$

gilt. Es sei nur beiläufig bemerkt, daß sich ebenso leicht $T(z_0)$ für beliebiges algebraisches z_0 nach oben abschätzen läßt, jedoch soll hiervon keine Anwendung gemacht werden.

Ferner ist wegen $F_y(z_0, y_0)\neq 0$ ohne weiteres klar, daß die Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ von $a_0(1/\nu)$ und den Zahlkoeffizienten von $F(z, y)$ rational abhängen. Diese Zahlkoeffizienten von $F(z, y)$ können übrigens ohne Einschränkung der Allgemeinheit rational vorausgesetzt werden.

Ist $f(z)$ bei $z=0$ regulär, so existiert eine Zahl $\varrho>0$ derart, daß die Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen von z auf jedem Blatt ihrer RIEMANNschen Fläche einen Konvergenzradius größer als ϱ besitzt. Dann folgt mit ν_0, das durch $\nu_0=2\left\lfloor\frac{1}{\varrho}+1\right\rfloor$ definiert sei, für alle $\nu>\nu_0$ und das Maximum der

[1]) Siehe z.B. POLYA-SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. II, VIII. Abschnitt, Aufg. 141 u. 236. Berlin: Springer 1925.

Beträge der Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ und ihrer Konjugierten der Potenzreihenentwicklung an der Stelle $1/\nu$ mit einer von ν und $\varkappa$ unabhängigen Konstanten γ_2 die Abschätzung

$$\left|\overline{a_\varkappa\left(\frac{1}{\nu}\right)}\right| < \gamma_2^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Durch Beachtung von (1) und (2) erkennt man, daß für die Betragsmaxima der ganzen Zahlen $T(1/\nu)^{\varkappa+1} \cdot a_\varkappa(1/\nu) = T^{\varkappa+1} a_\varkappa$ und aller Konjugierten, abkürzend geschrieben, mit einem geeigneten, von ν und $\varkappa$ unabhängigen γ_3 gilt

$$\left|\overline{T^{\varkappa+1} a_\varkappa}\right| < \nu^{\gamma_3(\varkappa+1)} \qquad (\nu > \nu_0).$$

Faßt man diese Feststellungen für die Stellen $z = \frac{1}{\nu}$ zum verschärften Satz von Eisenstein zusammen, so kann man formulieren:

Satz 1. *Gegeben sei eine algebraische Funktion $y = f(z)$, wobei z und y mittels rationalen Koeffizienten miteinander algebraisch verknüpft seien. $z = 0$ sei eine reguläre Stelle von $f(z)$. Dann existieren drei natürliche Zahlen ν_0, s und γ_4 derart, daß die Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ für alle $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ der Potenzreihenentwicklungen von $f(z)$ an den Stellen $1/\nu$ für $\nu > \nu_0$ algebraische Zahlen eines durch $a_0(1/\nu)$ erzeugten algebraischen Körpers $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}$ höchstens s-ten Grades sind, die durch Multiplikation mit der $(\varkappa+1)$-ten Potenz einer natürlichen Zahl $T(1/\nu) = T$ ganz werden, und daß für die ganzen Zahlen $T^{\varkappa+1} a_\varkappa$, wie auch für $T^{\varkappa+1}$ die Ungleichung*

$$\mathrm{Max}\left(T^{\varkappa+1}, \left|\overline{T^{\varkappa+1} a_\varkappa}\right|\right) < \nu^{\gamma_4(\varkappa+1)} \qquad (\nu > \nu_0;\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

erfüllt ist.

Ist $y = f(z)$ sogar eine rationale Funktion, so gilt über Satz 1 hinaus wie sofort einsichtig, noch der

Zusatz zu Satz 1: *Bei einer rationalen Funktion $y = f(z)$ ist der Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}$ vom Grade $\leq s$ der Potenzreihenentwicklung an der Stelle $1/\nu$ von ν unabhängig.*

Diese beiden Sätze sind insofern von besonderem Interesse, als man sie zu einer Charakterisierung der algebraischen bzw. der rationalen Funktionen, die durch die selbstverständliche Forderung der Algebraizität der Koeffizienten von $F(z, y)$ eingeschränkt sind, heranziehen kann, und dieses soll hier ausgeführt werden.

Seit langem ist bekannt, daß der Eisensteinsche Satz eine zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Algebraizität einer Funktion $f(z)$ ist. Hingegen läßt sich zeigen, daß $f(z)$ algebraisch sein muß, falls die Eigenschaften des Satzes 1 für genügend viele ν erfüllt sind.

Genauer lautet die Umkehrung von Satz 1 wie folgt:

Satz 2. *Es seien zwei natürliche Zahlen s und γ_4 und eine an der Stelle $z = 0$ auf einem Blatt ihrer Riemannschen Fläche reguläre analytische Funktion $f(z)$ vorgegeben. Der Radius der Kreisumgebung des Nullpunktes, innerhalb*

der $f(z)$ regulär sei, werde mit ϱ bezeichnet und es werde $\nu_0 = 2\left[\frac{1}{\varrho} + 1\right]$ eingeführt. Besitze nun mit

$$n \geqq 6(s+1)\gamma_4(\nu_0+1)^2 \tag{4}$$

die Funktion an den Stellen $z = \frac{1}{\nu_0+\tau}$, wobei $\tau = n+1, n+2, \ldots, 2n$ durchlaufe, Potenzreihenentwicklungen, deren Koeffizienten $a_\varkappa\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) = a_\varkappa$ Zahlen eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}_{\nu_0+\tau}$ höchstens s-ten Grades seien, der durch $a_0\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)$ erzeugt sei, und zu denen eine natürliche Zahl $T\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) = T$ existiere mit der Eigenschaft, daß $T^{\varkappa+1}a_\varkappa$ für alle $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$; $\tau = 1, \ldots, n$ ganz werde, und sei ferner für T und die Zahlen $T^{\varkappa+1}a_\varkappa$ die Ungleichung (3) aus Satz 1 erfüllt, so ist $f(z)$ eine algebraische Funktion von z.

Wir benötigen also die Eigenschaften, die Satz 1 aussagt, nur an endlich vielen Stellen, deren Anzahl n in (4) durch s, γ_4 und auch ν_0 angegeben ist, um die Umkehrung des Satzes 1 aussprechen zu können. Auf diese Weise lassen sich also die algebraischen Funktionen durch den verschärften EISENSTEINschen Satz an endlich vielen geeigneten Stellen charakterisieren. Allerdings haben wir so nur die an der Stelle $z = 0$ regulären algebraischen Funktionen charakterisiert. Das ist jedoch insofern keine Einschränkung der Allgemeinheit, als man eine algebraische Funktion, die an irgendeiner algebraischen Stelle $z = \alpha$ regulär ist, sofort durch die lineare Substitution $z^* = z - \alpha$ in eine bei $z^* = 0$ reguläre algebraische Funktion umschreiben kann.

Die rationalen Funktionen lassen sich zusammen mit dem Zusatz zu Satz 1 kennzeichnen durch den

Zusatz zu Satz 2: *Ist der Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_{\nu_0-\tau}$ vom Grade $\leqq s$ von τ unabhängig und*

$$n \geqq 10000(s+1)^3\gamma_4^2(\nu_0+1)^2, \tag{4*}$$

so ist $f(z)$ sogar eine rationale Funktion.

Zu beweisen bleibt die Behauptung, daß die angegebenen Eigenschaften für Algebraizität bzw. Rationalität von $f(z)$ hinreichend sind, also der Satz 2 und dessen Zusatz. Ich möchte vor der Ausführung dieser Beweise auf meine frühere Veröffentlichung über die Charakterisierung algebraischer Funktionen[2]) hinweisen, da der Beweisaufbau ähnlich wie dort verlaufen wird.

Wenden wir uns nun dem Beweis von Satz 2 zu.

Man setze mit natürlichen Zahlen l und m und unbestimmten Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ ein Polynom

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (f(z))^\mu \tag{5}$$

an und bestimme die $c_{\lambda\mu}$ als nicht sämtlich verschwindende, ganze rationale Zahlen so, daß $\Phi(z)$ und dessen Ableitungen $\Phi^{(\iota)}(z)$ $(\iota = 1, \ldots, j)$ auf dem in Satz 2 betrachteten Blatt der RIEMANNschen Fläche von $f(z)$ für alle Werte

[2]) SCHNEIDER, TH.: Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte. Acta math., Stockh. **86**, 57—70 (1951).

$z = \frac{1}{\nu_0 + n + 1}, \ldots, \frac{1}{\nu_0 + 2n}$ verschwindet, wobei über l, m und die natürlichen Zahlen j und n noch Festsetzungen zu treffen sind.

Jede dieser Bedingungen

$$\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 \qquad (\iota = 0, 1, \ldots, j;\ \nu = \nu_0 + n + 1, \ldots, \nu_0 + 2n)$$

liefert eine lineare homogene Gleichung für die $c_{\lambda\mu}$ mit algebraischen Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_\nu$ vom Grade $\leqq s$, und diese lineare Gleichung zerfällt, da die $c_{\lambda\mu}$ ganzrational gesucht werden, vermittels der Basisdarstellung der algebraischen Koeffizienten in höchstens s lineare homogene Gleichungen für die $c_{\lambda\mu}$ mit rationalen Koeffizienten. Diese Gleichungen wollen wir genauer ansehen.

Wegen (5) ist

$$\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\left(\frac{d^\iota (z^\lambda (f^\mu(z))^\mu)}{dz^\iota}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\left(\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\cdot\left(\frac{d^\eta (z^\lambda)}{dz^\eta}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot\left(\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\right).$$

Aus der vorausgesetzten Ungleichung (3) folgt, daß für alle $\mu = 1, 2, \ldots$ die Zahl

$$\frac{1}{(\iota-\eta)!}\left(\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota-\eta+\mu}$$

in $\mathfrak{K}_\nu$ ganzalgebraisch ist. Ferner ist unmittelbar einsichtig, daß

$$\frac{1}{\eta!}\left(\frac{d^\eta (z^\lambda)}{dz^\eta}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot \nu^{\lambda-\eta}$$

eine ganzrationale Zahl darstellt. Daraus folgt nun, daß die Koeffizienten der Linearform in den $c_{\lambda\mu}$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\iota!}\cdot\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right)\cdot\nu^l\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota-m} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\left(\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\cdot\left(\frac{1}{\eta!}\frac{d^\eta (z^\lambda)}{dz^\eta}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^l\right)\times\right.\\ &\left.\times\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota+\mu}\right)\cdot\frac{\eta!(\iota-\eta)!}{\iota!}\right)\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{m-\mu}\end{aligned}\right.$$

wegen

$$\binom{\iota}{\eta}\cdot\frac{\eta!(\iota-\eta)!}{\iota!} = 1$$

ganzalgebraische Zahlen aus $\mathfrak{K}_\nu$ sind. Der Koeffizient von $c_{\lambda\mu}$ in dieser Linearform lautet also

$$(7)\quad \nu^{l-\lambda}T^{m-\mu}\sum_{\eta=0}^{\iota}\left(\left(\frac{1}{\eta!}\frac{d^\eta (z^\lambda)}{dz^\eta}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot T^{\iota-\eta+\mu}\right)\cdot T^\eta\right).$$

Dabei ist

$$\frac{1}{\eta!}\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^{\lambda}=\begin{cases}0 & \text{für } \eta>\lambda,\\ \binom{\lambda}{\eta}\cdot\nu^{\eta} & \text{für } \eta\leqq\lambda.\end{cases}$$

Bezeichnet man die Potenzreihe von $f^{\mu}(z)$ mit $f^{\mu}(z)=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}a_{\varkappa\mu}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{\varkappa}$ für alle $\mu=1, 2, \ldots$ und $a_{\varkappa 1}=a_{\varkappa}$, so wird

$$\frac{1}{(\iota-\eta)!}\frac{d^{\iota-\eta}(f^{\mu}(z))}{dz^{\iota-\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}=a_{\iota-\eta,\mu}\left(\frac{1}{\nu}\right)=a_{\iota-\eta,\mu}$$

und für die Beträge der in $\mathfrak{R}_{\nu}$ ganzen Zahlen $a_{\iota-\eta,\mu}\cdot T^{\iota-\eta+\mu}=a^{\{1\}}_{\iota-\eta,\mu}T^{\iota-\eta+\mu}$ und deren Konjugierten $a^{\{\sigma\}}_{\iota-\eta,\mu}\cdot T^{\iota-\eta-\mu}$ ergibt sich mittels Induktion nach μ

$$(8)\qquad \overline{\left|a_{\iota-\eta,\mu}T^{\iota-\eta-\mu}\right|}=\underset{(1\leq\sigma)}{\mathrm{Max}}\left(\left|a^{\{\sigma\}}_{\iota-\eta,\mu}T^{\iota-\eta+\mu}\right|\right)<\nu^{\nu_4(\iota-\eta+\mu)}\binom{\iota-\eta+\mu-1}{\mu-1}.$$

Erinnern wir uns daran, daß $a_{\iota-\eta,\mu}$ in einem durch a_0, also auch durch die ganzalgebraische Zahl $T\cdot a_0$ erzeugten Körper liegt, mithin die Potenzen $(T\cdot a_0)^0$, $T\cdot a_0, \ldots, (T\cdot a_0)^{s_1}$ mit einem $s_1\leqq s$ eine Fundamentalbasis bilden, so läßt sich bekanntlich[3]) die ganze Zahl $a_{\iota-\eta,\mu}T^{\iota-\eta+\mu}$ in der Form

$$(9)\qquad a_{\iota-\eta,\mu}T^{\iota-\eta+\mu}=\sum_{\sigma=1}^{s_1}u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}\frac{(T\,a_0)^{\sigma}}{D}$$

mit ganzen rationalen Zahlen $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ darstellen, und dabei ist der ganzrationale Nenner $D=|\Delta|^2\geqq 1$ und mit der Bezeichnung $T\,a_0=\vartheta$ ist

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \vartheta & \vartheta^2 & \ldots & \vartheta^{s_1-1}\\ 1 & \vartheta^{\{2\}} & (\vartheta^{\{2\}})^2 & \ldots & (\vartheta^{\{2\}})^{s_1-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \vartheta^{\{s_1\}} & (\vartheta^{\{s_1\}})^2 & \ldots & (\vartheta^{\{s_1\}})^{s_1-1}\end{vmatrix};$$

$\vartheta^{\{\sigma\}}$ für $\sigma=2, \ldots, s_1$ bedeute die zu ϑ Konjugierten in $\mathfrak{R}_{\nu}$. Trägt man die Summe in (9) für den entsprechenden Faktor in (7) ein, so zerfällt, da die $c_{\lambda\mu}$ rational gesucht sind, jede der linearen Formen (6) für die $c_{\lambda\mu}$ in s_1 lineare Formen mit rationalen Koeffizienten, die durch Multiplikation mit der ganzrationalen Zahl D ganzrational werden. Diese ganzrationalen Koeffizienten setzen sich multiplikativ aus den $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ und aus $\binom{\lambda}{\eta}\cdot\nu^{\eta}$, $\nu^{l-\lambda}$, T^{η}, $T^{m-\mu}$ zusammen, und da wegen (8) und (9) für die $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ die Abschätzung

$$|u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}|<s_1!\,\nu^{\nu_4(\iota-\eta+\mu+s_1^2)}\cdot 2^{\iota-\eta+\mu}$$

gilt, so sind die Beträge der ganzrationalen Koeffizienten der $c_{\lambda\mu}$ kleiner als

$$(10)\qquad s!\,\nu^{\nu_4(j+m+s^2)}\cdot 2^{l+j+m}\cdot\nu^{j}\cdot\nu^{l}\cdot T^{j}<s!\cdot 2^{l+j+m}\cdot\nu^{\nu_4(3j+l+m+s^2)}.$$

[3]) Siehe z.B. HECKE, E.: Theorie der algebraischen Zahlen, S. 81 u. 82. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1923.

Die Anzahl dieser Gleichungen mit ganzrationalen Koeffizienten ist höchstens, wenn ν die natürlichen Zahlen $\nu_0+n+1, \ldots, \nu_0+2n$ durchläuft, $s \cdot n \cdot (j+1)$, während die Anzahl der Unbestimmten $c_{\lambda\mu}$ genau $(l+1)(m+1)$ beträgt.

Nun soll die folgende Festsetzung getroffen werden: Es werde $j=l$ und $m+1=2sn+1$ gesetzt. Dann ist die Anzahl der Unbestimmten mehr als doppelt so groß wie die Anzahl der Gleichungen und für die Abschätzung der Koeffizientenbeträge läßt sich wegen (10) und $\nu_0 \geq 1$ als obere Schranke der Ausdruck

$$(\nu_0+2n)^{\gamma_4(6l+4sn+2s^2)}$$

angeben. Nach einer bekannten Anwendung des Schubfachschlusses[4]) läßt sich dann die Existenz von nicht sämtlich verschwindenden ganzrationalen Zahlen $c_{\lambda\mu}$ nachweisen, die das Gleichungssystem (6) erfüllen und der Ungleichung

$$(11)\quad |c_{\lambda\mu}| < (l+1)(m+1)\cdot(\nu_0+2n)^{\gamma_4(6l+4sn+2s^2)} < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)}$$

genügen. Damit erfüllt das nach (5) gebildete $\Phi(z)$ die für diese Funktion geforderten Bedingungen.

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen: Verschwindet $\Phi(z)$ für $z=\frac{1}{\nu_0+n+1}, \ldots, \frac{1}{\nu_0+2n}$ mitsamt seinen Ableitungen $\Phi'(z), \ldots, \Phi^{(j_1)}(z)$, so verschwindet auch $\Phi^{(j_1-1)}(z)$ an denselben Stellen, wenn nur $j_1 \geq j$ und j genügend groß ist.

Zum Beweis ziehen wir die CAUCHYsche Integralformel heran. Es ist nach derselben unter der gemachten Voraussetzung des Verschwindens von $\Phi^{(\iota)}(1/\nu)$ für alle $\iota=0, 1, \ldots, j_1$; $\nu=\nu_0+n+1, \ldots, \nu_0+2n$

$$(12)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)\,dz}{\left(z-\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\prod\limits_{\nu=\nu_0+n+1}^{\nu_0+2n}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}} = \frac{1}{(j_1+1)!}\cdot\frac{\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)}{\prod\limits_{\substack{\nu=\nu_0+n+1\\ \nu\neq\nu_0+\tau}}^{\nu_0+2n}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}},$$

wobei C der Kreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius $R=\mathrm{Min}\left(\frac{3}{4}\varrho, \frac{3}{4}\right)$ sei, denn dann besteht wegen der in Satz 2 eingeführten Bezeichnung von ν_0 zwischen R und ν_0 der Zusammenhang $R > \frac{3}{2(\nu_0+1)}$, und somit liegen alle Stellen $\frac{1}{\nu_0+\tau}$ mit $\tau=n+1, \ldots, 2n$, sicher innerhalb dieses Kreises C.

Schätzen wir $\left|\frac{1}{(j_1+1)!}\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right|$ mittels (12) ab, so erhalten wir wegen

$$\max_{|z|=R}|\Phi(z)| < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)}(l+1)(m+1)\,e^{\gamma_5 m},$$

was aus (11) und der Regularität von $f(z)$ auf C mit $\max\limits_{|z|=R}|f(z)| < e^{\gamma_5 m}$ folgt, ferner wegen

$$\max_{|z|=R}\frac{1}{\left(z-\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\prod\limits_{\nu=\nu_0+n+1}^{\nu_0+2n}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}} < \left(2(\nu_0+1)\right)^{n(j_1+1)+1}$$

[4]) SIEGEL, C. L.: Abh. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1929**, Nr. 1, Hilfssatz S. 8.

und

$$\left| \prod_{\substack{\nu=\nu_0+1 \\ \nu \neq \nu_0+\tau}}^{\nu_0+n} \left(\frac{1}{\nu_0+\tau} - \frac{1}{\nu} \right)^{j_1+1} \right| < (\nu_0+2n)^{-(n-1)(j_1+1)}$$

die Ungleichung

$$(13) \quad \begin{cases} \left| \frac{1}{(j_1+1)!} \Phi^{(j_1+1)} \left(\frac{1}{\nu_0+\tau} \right) \right| < \\ < (\nu_0+2n)^{-(n-1)(j_1+1)} \cdot e^{(n(j_1+1)+1)\log(2(\nu_0+1))+\gamma_5 \cdot 2sn} \cdot (\nu_0+2n)^{\gamma_4(8l+8sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Andererseits ist $\frac{1}{(j_1+1)!} \Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau} \right)$ eine in $\mathfrak{K}_{\nu_0+\tau}$ gelegene algebraische Zahl, die, wie analog den vorangegangenen Betrachtungen zu (6) ersichtlich ist, durch Multiplikation mit $(\nu_0+\tau)^l \cdot T^{j_1+1+m}$ ganzalgebraisch wird. Die Abschätzung dieser ganzalgebraischen Zahl und ihrer Konjugierten läßt sich unter Benutzung der Voraussetzung (3) und von (11) analog (7) und (8) durchführen und liefert

$$(14) \quad \begin{cases} (\nu_0+\tau)^l \cdot T^{j_1+1+m} \cdot \frac{1}{(j_1+1)!} \left(\Phi^{(j_1+1)} \left(\frac{1}{\nu_0+\tau} \right) \right)^{\{\sigma\}} \Big| < \\ < (\nu_0+\tau)^{\gamma_4(j_1+1+m)} (\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)} (l+1)(m+1) 2^{l+m} \times \\ \times (\nu_0+\tau)^l \cdot 2^l \cdot (j_1+1) < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(2j_1+1+11l+12sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Da die Norm dieser Zahl, falls dieselbe von Null verschieden ist, was nun angenommen werde, absolut genommen, mindestens gleich 1 ist, folgt aus (14)

$$(15) \quad \begin{cases} \left| \frac{1}{(j_1+1)!} \Phi^{(j_1+1)} \left(\frac{1}{\nu_0+\tau} \right) \right| \geq \left| T^{-(j_1+1+m)} \cdot (\nu_0+\tau)^{-l} \times \right. \\ \times \prod_{2 \leq \sigma} \left(T^{j_1+1+m} \cdot (\nu_0+\tau)^l \cdot \frac{1}{(j_1+1)!} \cdot \left(\Phi^{(j_1+1)} \left(\frac{1}{\nu_0+\tau} \right) \right)^{\{\sigma\}} \right)^{-1} \Big| > \\ > (\nu_0+2n)^{(2j_1+1+11l+12sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Diese Ungleichung steht offenbar im Widerspruch zu (13), falls (4), was bis jetzt noch nicht benutzt worden ist, gilt, und l genügend groß ist, denn aus (4) folgt einmal für die Teilfaktoren der rechten Seite von (13)

$$(\nu_0+2n)^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)} \cdot e^{n(j_1+1)\log(2(\nu_0+1))} < 1$$

für alle positiven j_1, wie leicht nachzuprüfen ist, und weiter durch Division der Ungleichungen (13) durch (15)

$$(16) \quad \begin{cases} 1 < e^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)\log(\nu_0+2n)} \cdot e^{\gamma_5 \cdot 2sn} \cdot e^{\log(2(\nu_0+1))} \cdot e^{\gamma_4(2j_1+1)\log(\nu_0+2n)} \times \\ \times e^{\gamma_4(8l+11sl+8sn+2s^2+s(12sn+2s^2))\log(\nu_0+2n)}. \end{cases}$$

Wegen (4) ist

$$n \geq 24\gamma_4(s+1)$$

und daher unter weiterer Berücksichtigung von $j_1 \geq j = l$

$$(17) \quad e^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)\log(\nu_0+2n)} \cdot e^{\gamma_4(2j_1+1+8l+11sl)\log(\nu_0+2n)} < e^{-l\log(\nu_0+2n)}.$$

Durch Kombination von (16) mit (17), indem man den der linken Seite von (17) gleichen Faktor in (16) vergrößert, erkennt man

$$1 < e^{-l+\gamma_4(8sn+2s^3+s(12sn+2s^2))\log(\nu_0+2n)} \cdot e^{\gamma_5 \cdot 2sn} \cdot e^{\log(2(\nu_0+1))},$$

und diese Ungleichung und damit auch (16) ist bei festen Werten von s, γ_4, γ_5 und ν_0 für genügend großes l unmöglich. Nun sei l so groß gewählt, daß (16) nicht gilt. Dann haben wir für alle $j_1 \geq l$ einen Widerspruch zu $\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) \neq 0$; also muß, wie behauptet $\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)$ verschwinden.

Dann muß aber $\Phi(z)$ an jeder der Stellen $\frac{1}{\nu_0+\tau}$ $(\tau = n+1, \ldots, 2n)$ von beliebig hoher Ordnung verschwinden, und da es nach seiner Konstruktion (5) eine analytische Funktion ist, ist es identisch Null, d.h. $f(z)$ ist eine algebraische Funktion.

Es geht aus der Beweisdurchführung hervor, daß es ein Leichtes ist, die Zahl n durch eine kleinere zu ersetzen, aber dies soll nicht unsere Aufgabe sein.

Die Rationalität ist gezeigt, wenn von $f(z)$, welches nach Satz 2 unter den gültigen Voraussetzungen als algebraisch bereits erwiesen ist, die Eindeutigkeit bewiesen ist. Diese folgt analog zu [2]) aus dem identischen Verschwinden einer Funktion

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} b_{\lambda\mu} z^\lambda f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right) \tag{18}$$

mit geeigneten Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$, denn durch Einführung von w durch $z = \frac{1}{w}$ und $f(z) = \varphi(1/z)$ wird

$$f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right) = f\left(\frac{1}{mw+\mu}\right) = \varphi(mw+\mu),$$

also aus der rechten Seite von (18)

$$\sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} b_{\lambda\mu} w^{-\lambda} \varphi(mw+\mu) = 0,$$

d.h., $\varphi(mw)$ genügt einer linearen homogenen Differenzengleichung mit eindeutigen Funktionen in w als Koeffizienten, woraus bekanntlich die Eindeutigkeit von $\varphi(mw)$, also auch von $f(z)$ folgt.

Mit ϱ^* sei der Radius einer Kreisumgebung des Nullpunktes bezeichnet, innerhalb der die sämtlichen Funktionen $f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)$ mit $\mu = 0, 1, \ldots, m$ regulär sind; dort ist dann auch $\Psi(z)$ regulär.

Die Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$ von $\Psi(z)$ seien nun derart zu bestimmen, daß sie nicht alle Null sind und $\Psi(z)$, sowie die Ableitungen $\Psi^{(\iota)}(z)$ $(\iota = 1, \ldots, j)$ auf dem in Satz 2 genannten festen Blatt der RIEMANNschen Fläche von $f(z)$ für $z = \frac{1}{\nu}$; $\nu = \nu_0 + n + 1, \ldots, \nu_0 + 2n$ mit $\nu_0 = 2\left\lfloor \frac{1}{\varrho^*} + 1 \right\rfloor$ verschwinden. Auch hier liefern diese Bedingungen wieder ein lineares homogenes Gleichungssystem von $n(j+1)$ Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten aus einem Körper

höchstens s-ten Grades und mit $(l+1)(m+1)$ Unbestimmten $b_{\lambda\mu}$. Die Koeffizienten dieser Gleichungen haben nach Division durch $\iota!$ die Gestalt

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\iota!}\cdot\frac{d^{\iota}\left(z^{\lambda}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\right)}{dz^{\iota}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\iota!}\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} \\ &= \sum_{\eta=0}^{\iota}\left(\frac{1}{\eta!}\cdot\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right), \end{aligned}\right.$$

wobei der zweite Faktor in der Summe den $(\iota-\eta)$-ten Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)$ nach Potenzen von $z-\frac{1}{\nu}$ darstellt. Dieser Faktor läßt sich, wie man mittels Induktion nachprüft, in der Gestalt

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(\iota-\eta)!}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} \\ &= \left(\sum_{\delta=1}^{\iota-\eta}\frac{f^{(\delta)}\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{\delta!}\cdot(-1)^{\iota-\eta+\delta}\binom{\iota-\eta-\delta}{\delta-1}\frac{m^{\delta}\cdot\mu^{\iota-\eta-\delta}}{(m+\mu z)^{\iota-\eta+\delta}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} \end{aligned}\right.$$

ausdrücken. Dabei ist

$$\frac{1}{\delta!}f^{(\delta)}\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\delta!}f^{(\delta)}\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right) = a_{\delta}\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$$

der Koeffizient der δ-ten Potenz von $\left(z-\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$ in der zugehörigen Potenzreihenentwicklung von $f(z)$. Mithin ist wegen (19) und (20) mit $T=T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$ die Zahl

$$\frac{1}{\iota!}\cdot\frac{d^{\iota}\left(z^{\lambda}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\right)}{dz^{\iota}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^{\lambda}\cdot\left(T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)\right)^{\iota+1}\cdot(\nu m+\mu)^{2\iota}$$

in $\mathfrak{R}$ vom Grade s ganzalgebraisch. Dieser Körper $\mathfrak{R}$ ist nach Voraussetzung unabhängig von μ. Daraus ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der linearen Gleichungen für die $b_{\lambda\mu}$ in $\mathfrak{R}$ gelegene algebraische Zahlen sind, und zwar besitzen die Linearformen

$$\frac{1}{\iota!}\cdot\Psi^{(\iota)}(z)\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^{l}\cdot\prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)\right)^{j+1}\cdot(\nu m+\mu)^{2j}\right)$$

in den $b_{\lambda\mu}$ ganzalgebraische Koeffizienten, deren Beträge wegen der Voraussetzung (3) und den Beziehungen (19) und (20), samt den Beträgen ihrer Konjugierten, kleiner als

$$2^{l}\cdot\nu^{l}\cdot\prod_{\mu=0}^{m}\left((\nu_0+2n)m+\mu\right)^{\gamma_4(j+1)+2j}\cdot j\cdot\left((\nu_0+2n)m+m\right)^{\gamma_4 j}\cdot 2^{j}\cdot m^{2j}$$
$$< 2^{l+2j}(\nu_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}$$

sind. Im Gegensatz zum vorangegangenen Beweis wählen wir nun

$$m = [\sqrt{2sn}] + 1 \quad \text{und} \quad l = \big([\sqrt{2sn}] + 1\big)(j+1);$$

so ist sicher das $2s$-fache der Anzahl der Gleichungen $n \cdot (j+1)$ mit den ganzen Koeffizienten aus einem Körper s-ten Grades kleiner als die Anzahl der Unbestimmten $b_{\lambda\mu}$. Diese lassen sich dann mittels des Schubfachschlusses als nicht sämtlich verschwindende ganze rationale Zahlen ermitteln, die der Bedingung

$$(21) \quad \begin{cases} |b_{\lambda\mu}| < \gamma_6 \cdot 2^{3l+2j}\,(v_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}\, m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)} \\ \qquad < \gamma_6\big((v_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+4)(\sqrt{2sn}+4)(j+1)} \end{cases}$$

genügen, wobei γ_6 nur von $\mathfrak{K}$ abhängt.

Bei der weiteren Beweisdurchführung darf ich mich der größeren Analogie zum vorangegangenen Beweis für Satz 2 wegen kürzer fassen. Es ist der Hilfssatz noch zu zeigen, wonach $\Psi^{(j_1+1)}(z)$ mit $j_1 \geqq j$ für alle $z = \frac{1}{v_0+n+1}, \ldots, \frac{1}{v_0+2n}$ verschwindet unter der Voraussetzung, daß $\Psi^{(\iota)}(z)$ für alle diese z und $\iota = 0, 1, \ldots, j_1$ Null ist. Der Beweis wird wieder mittels der Integralformel (12) geführt mit der gleichen Bestimmung von C. Dann folgt mit $\tau = n+1, \ldots, 2n$ unter Beachtung von (21) einerseits aus der CAUCHYschen Formel

$$(22) \quad \begin{cases} \left|\frac{1}{(j_1+1)!}\,\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right)\right| < e^{(n-1)(j_1+1)\log(v_0+2n)}\, e^{(n(j_1+1)+1)\log(2(v_0+1))} \times \\ \qquad \times e^{\gamma_7} \cdot \gamma_6\big((v_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+5)(\sqrt{2sn}+4)(j_1+1)}. \end{cases}$$

Aus der Darstellung (18) folgt hingegen mit Hilfe der Betrachtungen eingangs dieses Beweises, daß

$$\frac{1}{(j_1+1)!}\,\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right) \cdot (v_0+\tau)^l \times \prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{(v_0+\tau)\,m+\mu}\right)\right)^{j_1+2} \cdot (v_0+\tau)\,m+\mu)^{2(j_1+1)}\right)$$

ganze, in $\mathfrak{K}$ gelegene algebraische Zahlen sind, für welche die Abschätzungen

$$\left|\prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{(v_0+\tau)\,m+\mu}\right)\right)^{j_1+2} \cdot \big((v_0+\tau)\,m+\mu\big)^{2(j_1+1)}\right) \cdot (v_0+\tau)^l \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{(j_1+1)!}\left(\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right)\right)^{(\sigma)}\right|$$
$$< 2^{l+j_1+2}\,(v_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j_1+2)}\, m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j_1+2)} \cdot (l+1)(m+1) \times$$
$$\times \gamma_6\big((v_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+4)(\sqrt{2sn}+4)(j+1)}$$
$$< \gamma_6\big((v_0+2n+1)^2 m\big)^{(2\gamma_4+8)(\sqrt{2sn}+4)(j_1+2)}$$

gelten.

Dann folgt, falls $\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right) \neq 0$ ist,

$$(23)\quad \begin{cases} \left|\frac{1}{(j_1+1)!}\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right)\right| > \left((v_0+2n+1)\,m\right)^{-(\gamma_4+2)(m+1)(j_1+2)} \times \\ \qquad \times (v_0+2n)^{-(\sqrt{2sn}+1)(j_1+1)}\,\gamma_6^{-(s-1)} \times \\ \qquad \times \left((v_0+2n+1)^2 m\right)^{-(2\gamma_4+8)(s-1)(\sqrt{2sn}+4)(j_1+2)} \\ \qquad > \gamma_6^{-(s-1)}\left((v_0+2n+1)^2 m\right)^{-(2\gamma_4+8)s(\sqrt{2sn}+4)(j_1+2)}. \end{cases}$$

Wegen (4) folgt nun aus (22) und (23) in Analogie zu (16)

$$0 < -\tfrac{1}{2}\cdot(j_1+1)(n-1)\log(v_0+2n) + \gamma_7 + s\log\gamma_6 + \\ + (j_1+2)\left(\log\left((v_0+n+1)^2 m\right)\right)\cdot(2\gamma_4+8)(s+1)\left(\sqrt{2sn}+4\right),$$

und dies ist für jedes n, das (4*) genügt und genügend großes j_1 unmöglich. Also verschwindet $\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right)$ für alle $\tau = 1, \ldots, n$ und alle $j_1 \geqq j$ bei hinreichend groß gewähltem festem j, und damit ist $\Psi(z) \equiv 0$, was gezeigt werden sollte.

Es sei noch hinzugefügt, daß sich die Sätze 1 und 2 und deren Zusätze naturgemäß modifizieren, wenn andere geeignete als die betrachteten Stellen $1/v$ zugrunde gelegt werden und insbesondere, wenn zu geeigneten Stellen eine p-adische Bewertung herangezogen wird.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Mai 1953.)

Der Kreisel

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von Dr. **R. Grammel**, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, neubearbeitete Auflage.

Erster Band:

Die Theorie des Kreisels

Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten Gr.-8°. 1950.

DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Aus den Besprechungen: ...Das Buch behauptet nach wie vor seinen Platz neben dem großen Werk von Klein und Sommerfeld, es ist in manchem knapper, mehr lehrbuchmäßig, bringt aber andererseits als jünger vieles Neue, namentlich an Anwendungen, bemüht sich ganz besonders um eine anschauliche Darstellung, wovon schon die zahlreichen Abbildungen Zeugnis ablegen. In der neuen Auflage ist es nicht unwesentlich umgestaltet worden. Zunächst wäre die Zweiteilung zu nennen, in Theorie und Anwendungen. Innerhalb des vorliegenden ersten Bandes ist eine bemerkenswerte Umstellung nach pädagogischen Gesichtspunkten erfolgt: der Stoff steigt jetzt vom Leichteren zum Schwereren auf, vom kräftefreien symmetrischen Kreisel über den geführten zum schweren, dann zum unsymmetrischen Kreisel ... Der Einfluß der Reibung wird ausführlich besprochen. Ein vierter Abschnitt behandelt noch besondere Probleme, z. B. den Spielkreisel, das rollende Rad und gyroskopische Systeme, so die Anwendungen des zweiten Bandes vorbereitend... Wichtig ist der reiche Inhalt in pädagogisch vollendeter Form.

„Zeitschrift für angewandte Physik"

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen. VI, 268 Seiten Gr.-8°. 1950.

DM 30.—; Ganzleinen DM 33.—

Aus den Besprechungen: ... Auch dieser Band zeigt wieder das große didaktische Geschick des Verfassers, der nicht seine Aufgabe darin sieht, eine ermüdende Anzahl von Kreiselgeräten und ihrer Konstruktion vorzuführen, sondern dem es darum zu tun ist, das Grundsätzliche hervorzuheben. Dadurch ist das Buch nicht nur für den Ingenieur, sondern auch für den Mathematiker von hohem Interesse. Der Referent erinnert sich noch an das Vergnügen, welches ihm das Studium der ersten Auflage bereitet hat. Die Auflage ist auf den neuesten Stand gebracht, enthält vieles, was nicht leicht zugänglich ist, und enthält selbstverständlich viele originelle Beiträge des Verfassers. Es ist das moderne Lehrbuch des Kreisels. Die Ausstattung ist, wie immer bei diesem Verlag, vortrefflich.

„Monatshefte für Mathematik"

...The book can be recommended as an introduction to the subject for the potential designer and as a useful addition to the library shelf. It is, of course, biased somewhat towards the products of the author's own country, but there are adequate references to other sources of information... *„Proceedings of the Physical Society"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von **R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.**

IV. Band:

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers

Von Dr. **Erwin Madelung,** o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Fünfte, unveränderte Auflage. Mit 29 Textabbildungen. XX, 531 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 47.—; Ganzleinen DM 49.70

Aus den Besprechungen der vierten Auflage: ....Viel Freude macht es, die kurzen Bemerkungen zu lesen, die Madelung voranstellt: Die Einleitung über die Aufgabe und die Methoden der mathematischen Physik, über das Begriffssystem der Mathematik, über das Begriffssystem der theoretischen Physik. Neu gegenüber früheren Auflagen ist der Abschnitt Zahlen, Funktionen und Operatoren im ersten Teil. Er enthält unter anderem eine Zusammenstellung über die δ-Funktion und über Spinoperatoren und Spinoren. Neugefaßt sind die Abschnitte Relativitätstheorie, Quantentheorie, Thermodynamik im zweiten Teil. In dem Abschnitt Relativitätstheorie wird in der Nummer „Allgemeine Feldtheorie" eine kurze Zusammenstellung über den Zusammenhang zwischen Lagrange-Funktion, Feldgleichungen, Impuls-Energie-Erhaltungssatz, Hamilton-Funktion gegeben. Im Abschnitt Quantentheorie wird vor allem das Begriffssystem und der Formelschatz der Wellenmechanik behandelt, dann die Diracsche Theorie des Elektrons und die Strahlungstheorie mit besonderer Betonung der Quantentheorie der Strahlung. Immer wieder fällt die eigenwillige, zum Nachdenken anregende Formulierung allgemeiner Aussagen auf. Nach meiner Ansicht erreicht das Buch wirklich, was es vorhat: Für den Theoretiker das zu geben, was der Kohlrausch für den Experimentalphysiker ist. Ich freue mich, das Buch zu besitzen.

Professor Bechert-Mainz in „Zeitschrift für angewandte Physik"

Grundversuche der Physik in historischer Darstellung

Von Dr. phil., Dr. rer. nat. e. h. **Carl Ramsauer,** emer. o. Professor der Physik an der Technischen Universität Berlin.

In zwei Bänden.

Erster Band: **Von den Fallgesetzen bis zu den elektrischen Wellen.** Mit 129 Abbildungen. VIII, 189 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 19.80

Zweiter Band: **Von den Röntgenstrahlen bis zu den Materiewellen.** In Vorbereitung.

Aus den Besprechungen: Der Verfasser stellt sich in diesem sehr lesenswerten Buche die Aufgabe, die Grundversuche der Physik historisch und kritisch darzustellen. Das Werk will nicht die bereits vorliegenden allgemeinen und speziellen Geschichtswerke ersetzen, sondern in der Richtung ergänzen, daß es eine geschichtlich und sachlich richtige Darstellung der Versuchsaufbauten, Versuchsziele und Versuchsergebnisse gibt. Die großen experimentellen Erfahrungen des Autors befähigen ihn, die wichtigsten Versuche, welche den Ausgangspunkt zur Entwicklung der modernen Physik bilden, besser darzustellen, als der reine Historiker. Dadurch bringt das Buch die Grundlagen der Physik besonders den Lehrern und Schülern höherer Anstalten näher, die im Aufbau der Schulversuche manche Anregung erfahren. Jeder physikalische Versuch setzt sich aus einem experimentellen und einem geistigen Anteil zusammen. Die hier behandelten Grundversuche eröffnen nach beiden Richtungen neue Gebiete und gestatten so einen tiefen Einblick in das Werden unserer Wissenschaft. Der Autor unterzieht sich auch der Mühe, die in den historischen Abhandlungen verwendeten Maße auf heute übliche Größen umzurechnen, wodurch ein Vergleich mit neueren Versuchen erleichtert wird. Eine entsprechende Umrechnungstabelle ist zusätzlich am Schlusse des Buches angegeben. Außerdem findet sich dort, für jeden Artikel geschlossen zusammengestellt, noch eine große Anzahl von Anmerkungen allgemeiner Art, wie Personaldaten, Literaturangaben usw. Die Schlußbemerkungen ermöglichen ein zusammenfassendes Urteil über die Bedeutung der entsprechenden Entdeckung und die Leistung ihres Entdeckers. Druck und Ausführung des Werkes sind mustergültig. *„Acta Physica Austriaca"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.